2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Complexe getallen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- complex getal — reëel deel — imaginair deel — complexe vlak — geconjugeerde
- modulus (absolute waarde) — argument — poolvoorstelling — vermenigvuldigregel — stelling van De Moivre
- formule van Euler
- hoofdstelling van de algebra
- complexe functie — translatie en draaivermenigvuldiging

Activiteitenlijst

- een complex getal voorstellen in het complexe vlak — het imaginaire en het reële deel bepalen
- de poolvoorstelling van een complex getal opstellen — van een poolvoorstelling naar a + bi terugrekenen — de vermenigvuldigregel en de stelling van De Moivre gebruiken bij vermenigvuldigen en machtsverheffen
- complexe getallen schrijven in de vorm $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ met $r = |z|$ en $\varphi = \arg(z)$ — met complexe getallen in die vorm rekenen
- vergelijkingen oplossen en daarbij complexe oplossingen bepalen
- functiewaarden bij complexe functies berekenen — bij het domein van een complexe functie het bereik in beeld brengen

Achtergronden

Figuur 1

Sinds **Girolamo Cardano (1501 - 1576)** wordt gerekend met getallen die nu 'imaginaire getallen' worden genoemd. Cardano's belangrijkste werk op het gebied van de wiskunde is zijn 'Ars Magna'. Daarin maakte hij de oplossing van alle typen derdegraads en vierdegraads vergelijkingen bekend. De door hem ingelijfde methode van **Tartaglia** werd er in uitgelegd. Hoewel Cardano geen enkel begrip had van complexe getallen ontdekte hij dat er bij de oplossing van bepaalde derdegraads vergelijkingen met wortels uit negatieve getallen moest worden gewerkt. In feite maakte hij zo de eerste berekeningen met imaginaire getallen.

Veel wiskundigen na hem moesten niets van deze in hun ogen imaginaire (aldus **Descartes**) grootheden hebben, ze bestonden slechts in de verbeelding. Ze waren hoogstens nuttig (volgens Albert Girard (1595 - 1632) in zijn 'L'Invention nouvelle en l'algèbre') om bepaalde typen vergelijkingen te kunnen oplossen. Desondanks bedacht Raphael Bombelli (1526 - 1572) rekenregels voor complexe getallen en bleven deze getallen in verschillende wiskundige problemen opduiken. In 1685 bedacht John Wallis (1616 - 1703) als eerste een meetkundige voorstelling gebaseerd op het werken met twee assen. Tegenwoordig worden complexe getallen veel toegepast.

Het werk van de Italiaanse wiskundigen uit de 16e eeuw leverde een algemene methode op voor het oplossen van derdegraads vergelijking. Daarbij speelt de **formule van Cardano** een belangrijke rol.

Toepassen

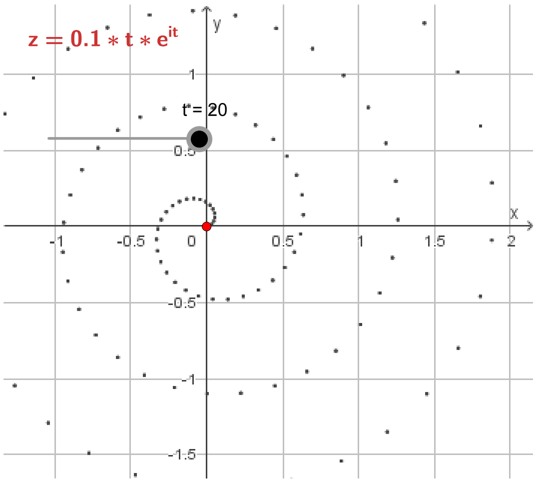
Opgave 1: Vlakke krommen

Bekijk de applet

Met behulp van complexe getallen kun je krommen in het complex vlak beschrijven.

In de notatie van Euler $z = r\,e^{i\varphi}$ is het namelijk goed mogelijk om r en/of φ te variëren. Beide kunnen bijvoorbeeld worden opgevat als functie van een parameter t. Afhankelijk van t krijg je dan telkens een nieuw punt in het assenstelsel. Die punten kunnen allerlei krommen vormen. Een cirkel maken is zo heel gemakkelijk, toch?

Als je t laat toenemen zie je hier (punten van) de kromme ontstaan waarvoor geldt $z = 0{,}1t\,e^{it}$.



Figuur 2

a Hoe ziet de kromme er uit die wordt beschreven door: $z = 5e^{i\varphi}$?

b Bekijk de spiraal die in de applet ontstaat. Hoe kun je aan de gegeven formule zien dat het een spiraal moet worden?

c Hoe kun je met behulp van complexe getallen een cirkel beschrijven?

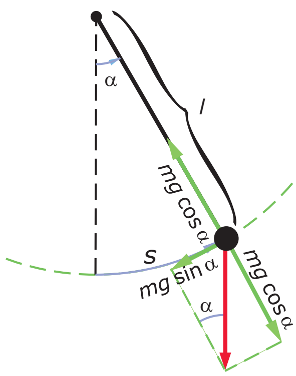
d Hoe kun je een ellips beschrijven?

e Een ingewikkelder kromme is de verzameling van alle punten z die beschreven wordt door: $z = \frac{2t}{1+t} \cdot e^{\pi i t}$, met $t \geq 0$. Beschrijf de kromme die deze verzameling in het complexe vlak vormt.

f Het is niet beslist nodig om de notatie van Euler te gebruiken. Ook in de schrijfwijze $z = x + iy$ kunnen zowel x als y een functie van t zijn. Zoek een paar "mooie" krommen en beschrijf die met behulp van complexe getallen. Probeer telkens ook te bepalen hoe $r = |z|$ en $\varphi = \arg(z)$ van t afhangen. Teken ook de uitgezochte krommen!

Opgave 2: Mathematische slinger

Een mathematische slinger is een (niet bestaanbare) ideale slinger. Hij is het best te benaderen door een naar verhouding kleine loden kogel aan een lange, sterke maar ragdunne draad te hangen. Als je de kogel uit zijn evenwichtsstand brengt en loslaat gaat hij slingeren. Bij de ideale slinger neem je dan aan, dat de draad geen massa heeft en geen luchtweerstand ondervindt.
De kogel wordt voortbewogen door een component van de zwaartekracht, waarvoor volgens de tweede wet van Newton geldt:
$F = m \cdot a = -mg \sin(\alpha)$



Figuur 3

Hierin is:

- a is de versnelling (in m/s^2), de afgeleide van de snelheid v (in m/s), die de afgeleide van de afgelegde weg s (in m) is;
- m is de massa in g;
- g is de zwaartekrachtversnelling;
- α is de hoek van de draad met de evenwichtsstand (in rad).

α hangt af van de tijd t (in s).
Verder is $s = l \sin(\alpha)$ met l in m. $\sin(\alpha) \approx \alpha$ voor kleine hoeken.
Voor $\alpha(t)$ geldt: $l \cdot \alpha''(t) = -g \cdot \alpha(t)$.
Deze differentiaalvergelijking is op te lossen m.b.v. complexe getallen. De oplossingen zijn $\alpha(t) = r\,e^{cti}$, r en c zijn hierin nog te bepalen constanten. Het reële deel van deze functie is de sinusoïde die de beweging van de kogel beschrijft.

a Leid voor $\alpha(t)$ de volgende differentiaalvergelijking af: $\alpha''(t) = -\frac{g}{l} \cdot \alpha(t)$.

b Laat zien, dat aan een dergelijke differentiaalvergelijking een functie van de vorm $\alpha(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}ct}$ voldoet. r en c zijn hierin nog te bepalen constanten.Bepaal deze constanten, dat wil zeggen druk ze uit in g en l.

c Herschrijf de functie die je nu krijgt naar de vorm: $\alpha(t) = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$. Laat zien, dat het reële deel van de gevonden functie $\alpha(t)$ een zuivere sinusoïde oplevert.

d Neem $l = 1$ m en zoek de juiste waarde van g op. Neem aan dat $\alpha(0) = 0{,}1$ rad. Stel nu een functievoorschrift op voor de a afhankelijk van t.

e Natuurlijk moet je eigenlijk rekening houden met de luchtweerstand en de wrijving die daardoor ontstaat. Die wrijving is recht evenredig met $l \cdot \alpha'(t)$. Laat zien, dat nu geldt: $ml\alpha''(t) + kl\alpha'(t) = -mg\alpha(t)$ een positieve constante, de wrijvingscoëfficiënt, is.

f Deze differentiaalvergelijking is nog niet eenvoudig op te lossen. Probeer een functie als $\alpha(t) = \mathrm{e}^{zt}$, waarin z een willekeurig constant complex getal is.

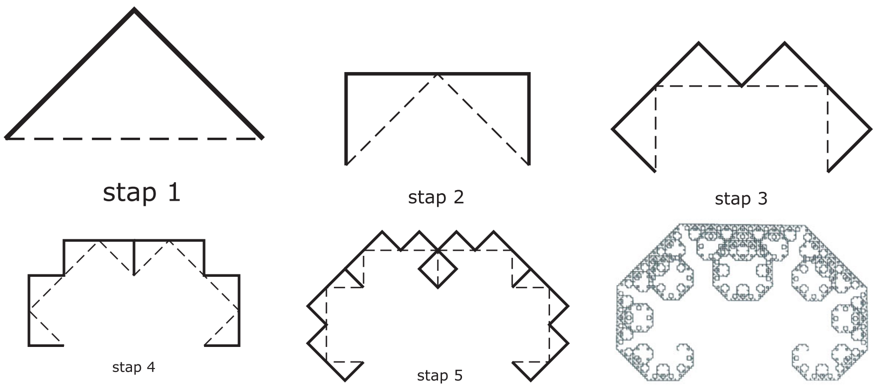
Laat zien dat de differentiaalvergelijking dan overgaat in $mlz^2 + klz = -mg$.

g Neem $l = 1$ m, $m = 500$ g en $k = 0{,}10$. Bepaal nu de oplossingen $\alpha(t)$ van de differentiaalvergelijking. Is de grafiek van het reële deel van $\alpha(t)$ nu ook een zuivere sinusoïde?

h Heeft de differentiaalvergelijking voor alle waarden van m,l en k zinvolle oplossingen? Verklaar je antwoord.

Opgave 3: Fractalen

Omstreeks 1918 ontdekte de Franse wiskundige **Gaston Julia** een zeer grillige meetkundige structuur, waarvan hij zich toen nauwelijks een visuele voorstelling kon maken. Pas in de laatste jaren zijn wiskundigen met behulp van snelle computers met grote grafische mogelijkheden in staat om deze structuren - die de wiskundige **Mandelbrot** fractalen is gaan noemen - zichtbaar te maken.



Figuur 4

De fractal van Levy bijvoorbeeld is te construeren door te beginnen met een (niet te klein) lijnstuk en dat te vervangen door een half vierkant waarvan de uiteinden samenvallen met die van het lijnstuk. Vervolgens herhaal je dat met de twee lijnstukjes die je gekregen hebt, enzovoorts, tot in het oneindige door.

De Levy-fractal kun je beschrijven met een stelsel complexe functies.
Begin met de complexe getallen z met $\mathrm{Im}(z) = 0$ en $\mathrm{Re}(z)$ uit $[0{,}4]$.
Pas op elke z deze twee functies toe:

$$L(z) = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i})z$$

$$R(z) = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{i})z + 2(1 + \mathrm{i})$$

Teken de beide beeldlijnstukken. Pas op elk der beeldlijnstukken opnieuw beide functies toe. Je krijgt dan vier beeldlijnstukjes, waarop je opnieuw beide functies loslaat. En zo ad infinitum.

Als je googlet op ‘fractal’ vind je veel sites waar prachtige voorbeelden van fractalen zijn te zien...

a Maak zelf de fractal van Levy.

Het vreemde van fractalen is dat er een (in principe) oneindig lange gebroken lijn ontstaat op een eindig oppervlak. Fractalen zijn met de computer te tekenen en met complexe getallen vaak te beschrijven met behulp van eenvoudige lineaire complexe functies.

b Gegeven is de complexe functie $f(z) = (1 + \mathrm{i})\, z$. Teken het beeld van $z_1 = 0$ en $z_2 = 4$ en van het lijnstuk tussen beide punten.

c Met welke factor wordt de lengte van het lijnstuk vermenigvuldigd? Over welke hoek wordt het gedraaid?

d Beantwoord dezelfde vragen voor de complexe functie $g(z) = (1 + \mathrm{i})\, z + (1 - \mathrm{i})$.

Fractalen kunnen nu ontstaan door complexe functies na elkaar te blijven uitvoeren. Bijvoorbeeld kan de Levy-fractal beschreven worden met behulp van een stelsel complexe functies. Begin met de complexe getallen z gelegen op het lijnstukje met eindpunten $z_1 = 0$ en $z_2 = 4$. Pas op elke z deze twee functies toe: $L : L(z) = 0{,}5(1 + \mathrm{i})\, z$; $R : R(z) = 0{,}5(1 - \mathrm{i})\, z + 2(1 + \mathrm{i})$.

e Teken de beide beeldlijnstukken. Pas op elk der beeldlijnstukken opnieuw beide functies toe. Je krijgt dan vier beeldlijnstukjes, waarop je opnieuw beide functies loslaat. Enzovoort.

f Een andere bekende fractal is de H-fractal. Daarbij zet je telkens aan de eindpunten van een lijnstuk twee lijnstukjes die er loodrecht op staan en er de helft van zijn. Teken eens een H-fractal (weer 12 stappen) en probeer hem door een stelsel complexe functies te beschrijven.
Echte liefhebbers van programmeren hebben natuurlijk aan een eenvoudig functievoorschrift genoeg om het ontstaan van de twee fractalen hierboven met de computer in beeld brengen! Daarbij kun je gebruik maken van het feit dat complexe getallen kunnen worden voorgesteld door vectoren (x, y). Er bestaan veel websites waarop fractalen zichtbaar worden gemaakt. Misschien raak je er door geïnspireerd om ze zelf te programmeren. Bekijk ze maar eens...

Testen

Opgave 4

Bereken het reële en het imaginaire deel van de complexe getallen.

a $z = (8 - 3\,\mathrm{i})(2 + 5\,\mathrm{i})$

b $z = (2 - 2\,\mathrm{i})^2 \cdot (\text{-}4 + 3\,\mathrm{i})$

c $z = \frac{2 - 2\,\mathrm{i}}{\text{-}4 + 3\,\mathrm{i}}$

Opgave 5

Los de vergelijkingen algebraïsch op en schrijf de oplossingen in de vorm $z = a + b\,\mathrm{i}$. Rond alleen bij b en e af op twee decimalen, geef voor de rest exacte antwoorden.

a $2z^2 - 4z + 9 = 0$

b $z^4 = 1 - \mathrm{i}$

c $\mathrm{i}\,(z - \mathrm{i})^2 = 16$

d $\mathrm{i}\, z + 2 = 4\,\mathrm{i} - 2z$

e $(z + 2 - \mathrm{i})^3 = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$

Opgave 6

Teken (met toelichting) in het complexe vlak de punten z waarvoor geldt: $|z - 1| = 3$.

Opgave 7

Gegeven is de complexe functie $f(z) = (1 + 2\mathrm{i}) \cdot z$. Het bereik van f is een cirkel met een oppervlakte van 64π.

Welke oppervlakte heeft het bijbehorende domein?

Opgave 8

Gegeven is de complexe functie $g(z) = \mathrm{i}z + 1 - \mathrm{i}$. Het domein van g is gegeven door $|z| \leq 3$ en $\mathrm{Arg}(z) \geq 0{,}5\pi$.

Teken het bereik van g.

Opgave 9

Gegeven is de complexe functie: $f(z) = \frac{z}{1+\mathrm{i}}$

a Stel $z = a + b\mathrm{i}$. Bereken a en b als $f(z)$ de geconjugeerde is van $z + 1$.

b Stel $z = a + b\mathrm{i}$. Neem aan dat $1 \leq a \leq 3$ en $0 \leq b \leq 4$. Alle z-waarden die hieraan voldoen vormen het domein van f. Beschrijf het bijbehorende bereik.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@xs4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.