2.5 Complexe functies

Inleiding

Een reële functie heeft een voorschrift dat bij een getal uit het domein (een deel van de reële getallen) een getal uit het bereik (ook een deel van de reële getallen) berekent. Zowel domein als bereik zijn deel van een getallenlijn en dus kun je met twee getallenlijnen (een x-as en een y-as) deze functie in beeld brengen als een grafiek.
Bij een complexe functie is het domein een deel van het complexe Oxy-vlak en het bereik ook. Om zo'n functie in beeld te brengen moet je dus twee keer het complexe vlak tekenen en aangeven welk complexe getal als functiewaarde bij het complexe origineel hoort.
Soms kun je zowel domein als bereik in één assenstelsel aangeven...

Je leert in dit onderwerp

- het begrip complexe functie kennen;
- van sommige complexe functies domein en bereik weergeven in het complexe vlak.

Voorkennis

- werken met complexe getallen, ook in de poolvoorstelling;
- de formule van Euler toepassen bij de schrijfwijze van complexe getallen;
- met complexe getallen rekenen.

Verkennen

Opgave V1

Gegeven is het complexe getal $z = 1 + 2\,\mathrm{i}$.
Hierna wordt steeds een complexe functie gegeven. Bereken telkens $f(z)$.
Leg ook uit, hoe $f(z)$ in het complexe vlak kan ontstaan uit z.

a $f(z) = 2z$

b $f(z) = \mathrm{i}\,z$

c $f(z) = \mathrm{i}\,z + 2$

d $f(z) = z^2$

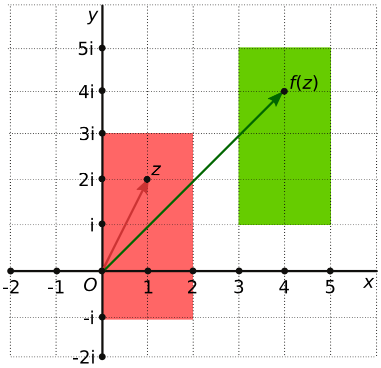
e $f(z) = \frac{1}{z}$

Uitleg 1

Bekijk de applet

Als van de complexe variabele $z = a + b\,\mathrm{i}$ het reële deel kan variëren vanaf 0 t/m 2 en het imaginaire deel vanaf -1 t/m 3, dan ligt z binnen het gebied $[0,2] \times [-1,3]$ van het complexe vlak. Dat is een rechthoekje.

De functie f met voorschrift $f(z) = z+3+2\,\mathrm{i}$ heeft dan $[0,2]\times[-1,3]$ als domein. Deze functie telt bij elke z uit het domein het complexe getal $3+2\,\mathrm{i}$ op.
Het resultaat (het bereik van f) is een **translatie** (verschuiving) over vector $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.



Figuur 1

Je ziet hier domein (rood) en bereik (groen) in één figuur.
z_f stelt de functiewaarde $f(z)$ voor.

Uiteraard zijn ook andere complexe functies denkbaar, kijk maar verder...

Opgave 1

In **Uitleg 1** wordt de complexe functie f met $f(z) = z + 3 + 2\mathrm{i}$ bekeken.

a Bereken $f(-1)$, $f(2 - \mathrm{i})$, $f(2 + 3\mathrm{i})$ en $f(3\mathrm{i})$. Bekijk in de applet hoe die functiewaarden ontstaan uit de gegeven z-waarden.

b Als $\mathrm{D}_f = [0,2] \times [-1,3]$ wat is dan B_f? Ga met de applet na, dat elk punt in het domein van f een functiewaarde heeft in het bereik van f.

c Als D_f bestaat uit alle waarden van z met $|z| \leq 2$, wat is dan B_f?

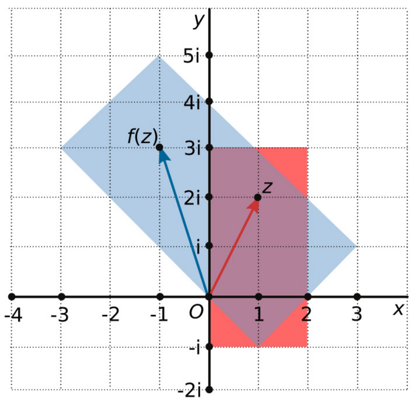
d Hoe ontstaat $f(z) = z + a + b\mathrm{i}$ uit z?

Uitleg 2

Bekijk de applet

Als van de complexe variabele $z = a + b\,\mathrm{i}$ het reële deel kan variëren vanaf 0 t/m 2 en het imaginaire deel vanaf -1 t/m 3, dan ligt z binnen het gebied $[0,2]\times[-1,3]$ van het complexe vlak. Dat is een rechthoekje.

De functie g met voorschrift $g(z) = (1 + \mathrm{i}) \cdot z$ heeft $[0,2] \times [-1,3]$ als domein. Deze functie vermenigvuldigt elke z uit het domein met het complexe getal $1 + \mathrm{i}$.
Het resultaat (het bereik van g) is dat elke $|z|$ wordt vermenigvuldigd met $|1 + \mathrm{i}| = 2$ en bij $\arg(z)$ telkens $\arg(1 + \mathrm{i}) = \frac{1}{4}\pi$ wordt opgeteld. Er vindt dus t.o.v. van de oorsprong O een **vergroting** met $\sqrt{2}$ en een **rotatie** (draaiing) over $\frac{1}{4}\pi$ plaats. Dit noem je een **draaivermenigvuldiging**.



Figuur 2

Je ziet hier domein (rood) en bereik (blauw) in één figuur.
z_g stelt de functiewaarde $g(z)$ voor. Domein en bereik overlappen elkaar. Dat is natuurlijk heel vaak het geval. Het domein van de functie kan wel het gehele complexe vlak beslaan en het bereik is ook (een deel van) het complexe vlak. Meestal is het beter om twee afzonderlijke complexe vlakken te tekenen.

Opgave 2

In **Uitleg 2** wordt de complexe functie g met $g(z) = (1 + \text{i}) \cdot z$ bekeken.

a Bereken $g(\text{-i})$, $g(2 - \text{i})$, $g(2 + 3\text{i})$ en $g(3\text{i})$. Bekijk in de applet hoe die functiewaarden ontstaan uit de gegeven z-waarden.

b Als $\text{D}_g = [0,2] \times [-1,3]$ wat is dan B_g? (Je kunt het bereik nu niet op dezelfde wijze beschrijven als het domein, maar je kunt het wel omschrijven.) Ga met de applet na, dat elk punt in het domein van g een functiewaarde heeft in het bereik van g.

c Als D_g bestaat uit alle waarden van z met $|z| \leq 2$, wat is dan B_g?

d Als D_g bestaat uit alle waarden van z met $|z| \leq 2$ en $0 \leq \arg(z) \leq 0{,}5\pi$, wat is dan B_g?

e Hoe ontstaat $g(z) = (a + b\text{i}) \cdot z$ uit z?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **complexe functie** f heeft een voorschrift waarmee je bij een complex getal z een **functiewaarde** $f(z)$ kunt berekenen. Het domein van f is (een deel van) het complexe vlak, het bereik ook. Een eenvoudige grafiek is daarom niet te maken. Wel kun je vaak aangeven hoe de waarden van het bereik meetkundig uit de waarden van z ontstaan. Je noemt dit **meetkundige afbeeldingen**.

Bij de functie $f(z) = z + a + b\,\text{i}$ wordt op elke z uit het domein van f een **translatie** (verschuiving) met vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ toegepast.

Bij de functie $f(z) = (a + b\,\text{i}) \cdot z$ wordt op elke z uit het domein van f een **draaivermenigvuldiging** om de oorsprong O met factor $|a + b\,\text{i}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ en draaihoek $\arg(a + b\,\text{i}) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ toegepast.

Deze regels kun je zelf vrij gemakkelijk bewijzen met behulp van de voorgaande theorie.

Dit betekent bijvoorbeeld dat een **complexe lineaire functie** zoals
$f(z) = (a + b\,\text{i}) \cdot z + c + d\,\text{i}$ op elke z een draaivermenigvuldiging om O gevolgd door een translatie toepast.
En uit de vermenigvuldigingsregel volgt dat de **complexe kwadratische functie** $f(z) = z^2$ de modulus van elke z kwadrateert en het argument verdubbelt.
Bij veel complexe functies kun je vergelijkbare uitspraken doen...

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Gegeven is de complexe functie $f(z) = (1 + \mathrm{i})z + 3 + 2\,\mathrm{i}$
Het domein bestaat uit alle waarden van z met $|z| \leq 2$ en $-0{,}5\pi \leq \arg(z) \leq 0{,}5\pi$.
Teken het domein en het bereik van f in één figuur.

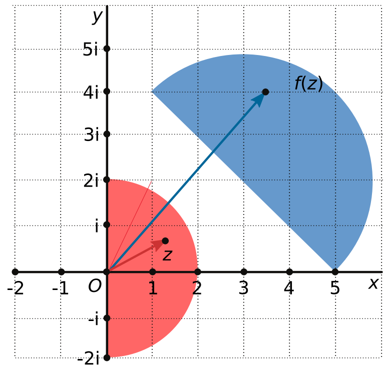
Antwoord

Het domein is het binnengebied en de rand van een halve cirkel met straal 2 en middelpunt O.
Het getal z kan nu gemakkelijk worden voorgesteld door $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$.
Ga na dat elke z die voldoet aan de voorwaarden binnen het rode gebied blijft.

De functie is een lineaire complexe functie.
De vermenigvuldiging met $1 + \mathrm{i}$ zorgt voor een draaivermenigvuldiging om O met factor $|1 + \mathrm{i}| = 2$ en draaihoek $\arg(1 + \mathrm{i}) = 0{,}25\pi$.

Het optellen van $3 + 2\,\mathrm{i}$ zorgt voor een verschuiving over vector $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ga na, dat $z_f = f(z)$ steeds binnen het (blauwe) bereik blijft.



Figuur 3

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je hoe bij de functie f met $f(z) = (1 + \mathrm{i})\,z + 3 + 2\mathrm{i}$ en een gegeven domein het bereik wordt bepaald. Neem nu als domein $D_f = [0,2] \times [-1,3]$

a Welke draaivermenigvuldiging en welke translatie moet je toepassen om het bereik te krijgen?

b Bereken $f(-\mathrm{i}), f(2 - \mathrm{i}), f(2 + 3\,\mathrm{i})$ en $f(3\,\mathrm{i})$.

c Beschrijf het bereik van f.

Opgave 4

Gegeven is de lineaire complexe functie g met $g(z) = 2\mathrm{i}z + 3 - \mathrm{i}$. Neem als domein alle complexe getallen waarvoor $|z| \leq 3$ en $0 \leq \arg(z) \leq 0{,}5\pi$.

a Bereken $g(0)$, $g(3)$ en $g(3\,\mathrm{i})$.

b Met welke draaivermenigvuldiging en welke translatie kan het bereik ontstaan uit het gegeven domein?

c Teken het bijbehorende bereik.

Voorbeeld 2

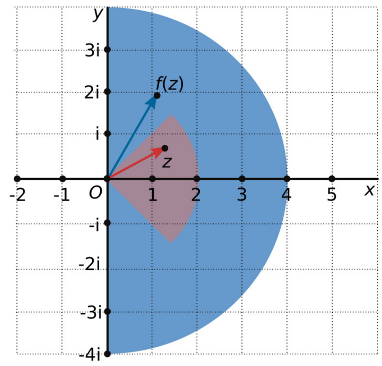
Bekijk de applet

Gegeven is de complexe functie $f(z) = z^2$.
Het domein bestaat uit alle waarden van z met $|z| \leq 2$ en $-0{,}25\pi \leq \arg(z) \leq 0{,}25\pi$.
Teken het domein en het bereik van f in één figuur.
Hoe zijn het reële deel en het imaginaire deel van $f(z)$ uit die van z af te leiden?

Antwoord

Het domein is het binnengebied en de rand van een kwart cirkel met straal 2 en middelpunt O. Het getal z stel je voor door $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Ga na dat elke z die voldoet aan de voorwaarden binnen het rode gebied blijft.
Omdat $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ geldt: $z^2 = r^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}$.
Dus $|f(z)| = |z|^2$ en $\arg(f(z)) = 2 \cdot \arg(z)$.
Dit geldt ook voor de punten op de rand van het domein. En daarom wordt het bereik een halve cirkel (alle argumenten verdubbelen) met als straal het kwadraat van de straal van het domein. Ga na, dat $z_f = f(z)$ steeds binnen het (blauwe) bereik blijft.

Als $z = a + b\,\mathrm{i}$, dan is $z^2 = (a + b\,\mathrm{i})^2 = a^2 - b^2 + 2ab\,\mathrm{i}$.



Figuur 4

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je bij $f(z) = z^2$ bij een gegeven domein het bereik bepaalt.

a Welke drie complexe getallen vormen de ‘hoekpunten’ van het gegeven domein?

b Laat door berekening zien dat de functiewaarden bij die drie complexe getallen de ‘hoekpunten’ van het bereik vormen.

c Neem nu als domein alle complexe getallen $z = 2 + bi$ met $|b| \leq 2$. Beschrijf het bijbehorende bereik.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

Gegeven is de complexe functie $f(z) = \frac{1}{z}$.

Het domein bestaat uit alle waarden van z met $|z| \leq 2$ en $0 \leq \arg(z) \leq 0{,}5\pi$.
Teken het domein en het bereik van f in één figuur.
Welke waarden van z blijven even ver van de oorsprong afliggen?

Antwoord

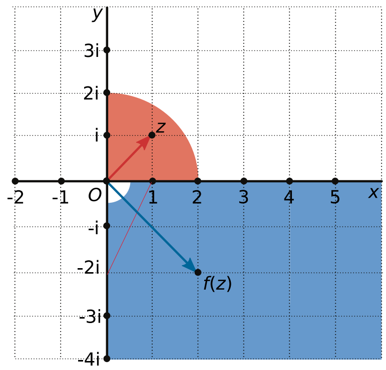
Het domein is het binnengebied en de rand van een kwart cirkel met straal 2 en middelpunt O. Het getal z stel je voor door $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$. Ga na dat elke z die voldoet aan de voorwaarden binnen het rode gebied blijft.

Omdat $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$ geldt: $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\varphi}$.

Dus $|f(z)| = \frac{1}{|z|}$ en $\arg(f(z)) = -\arg(z)$.

Dit geldt ook voor de punten op de rand van het domein. En daarom wordt het bereik het buitengebied van een kwartcirkel met straal $\frac{1}{2}$ en begrensd door de positieve x-as en de negatieve y-as. Ga na, dat $z_f = f(z)$ steeds binnen het (blauw begrensde) bereik blijft.

De z-waarden met $|z| = 1$ houden dezelfde afstand tot O.



Figuur 5

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** zie je hoe je bij $f(z) = \frac{1}{z}$ bij een gegeven domein het bereik bepaalt. De complexe getallen $z = 0, z = 2$ en $z = 2\mathrm{i}$ vormen de ‘hoekpunten’ van het gegeven domein.

a Bereken $f(2)$ en $f(2\mathrm{i})$.

b Welke moeilijkheid doet zich voor bij het berekenen van $f(0)$?

c Beschrijf het bereik op dezelfde manier als het gegeven domein.

d Neem als domein alle waarden van z met $|z| \leq 4$ en $0 \leq \arg(z) \leq \pi$.
Beschrijf het bereik.

Verwerken

Opgave 7

Gegeven is de complexe functie f met $f(z) = 2\,\mathrm{i}\,z + 1 - \mathrm{i}$.

a Bereken $f(0), f(3), f(2\,\mathrm{i})$ en $f(3 + 2\,\mathrm{i})$.

b Neem als domein $\mathrm{D}_f = [0,3] \times [0,2]$ en teken het bijpassende bereik.

c Door middel van welke afbeeldingen ontstaat dit bereik uit het gegeven domein?

d Toon aan dat bij elk complex getal $z = x + yi$ in dit domein een functiewaarde $f(z)$ hoort die in het bijpassende bereik ligt.

Opgave 8

Neem als domein alle complexe getallen $z = x + \mathrm{i}y$ met $|x| \leq 3$ en $|y| \leq 3$. Teken bij elk van de volgende complexe functies het bijpassende bereik.

a $f(z) = 2\mathrm{i}z$

b $g(z) = z + 1 - 2\mathrm{i}$

c $h(z) = (2 + 2\mathrm{i})\,z - 1$

d $k(z) = \frac{z}{1+\mathrm{i}}$

Opgave 9

De functie f met $f(z) = z^3$ heeft als domein alle complexe getallen waarvoor $|z| \leq 2$ en $0{,}25\pi \leq \arg(z) \leq 0{,}75\pi$.

a Beschrijf het bijbehorende bereik net zoals het domein is beschreven.

b Beredeneer dat alle complexe getallen die liggen op een lijn door de oorsprong O van het complexe vlak functiewaarden hebben die ook op een lijn door O liggen.

c Hoe zit dat met de functiewaarden van complexe getallen die op een lijn liggen die niet door O gaat?

Opgave 10

De functie f met $f(z) = \sqrt{z}$ heeft als domein alle complexe getallen waarvoor $|z| \leq 2$ en $-0{,}5\pi \leq \arg(z) \leq 0{,}5\pi$.

a Bereken $f(2\text{i})$ en $f(-2\text{i})$.

b Teken het bijbehorende bereik.

Opgave 11

De functie f met $f(z) = (1 + \text{i})\,z + 2\text{i}$ heeft als domein een vierkant met een oppervlakte van 25.

Hoe groot is de oppervlakte van het bijpassende bereik?

Toepassen

Opgave 12: Complexe e-macht

De functie $f(z) = \text{e}^z$ is de **complexe e-machtsfunctie**. Hij is periodiek.

Stel $z = a + b\,\text{i}$ en a kies je uit $[-1,1]$ en b uit $[-10,10]$.
Het domein van f wordt dan de rechthoek $[-1,1] \times [-10,10]$.

In de applet zie je z en $z_f = f(z)$ bij dit domein.

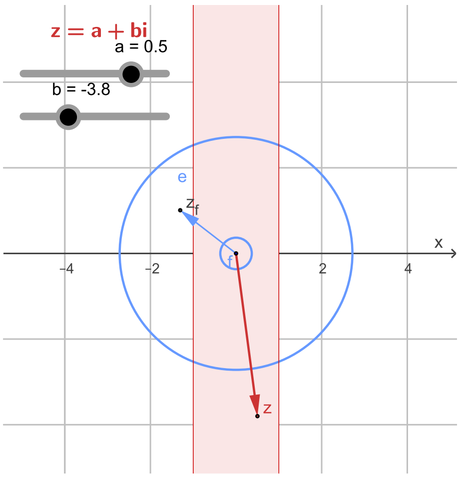
Het bereik wordt het gebied tussen de twee (blauwe) cirkels om O.

Bekijk de applet.

Dat is gemakkelijk in te zien, want
$f(z) = \text{e}^{a+b\,\text{i}} = \text{e}^a \cdot \text{e}^{b\,\text{i}}$.
Voor de functiewaarden geldt dus $|f(z)| = \text{e}^a$ en
$\arg(f(z)) = b$.
De twee cirkels die het bereik bepalen hebben straal e^{-1} en e^1.

De periodiciteit van $f(z)$ blijkt als je alleen b verandert: $f(a + b\,\text{i}) = f(a + (b + 2\pi)\,\text{i})$.

Op dezelfde wijze kun je de complexe functie $g(z) = \ln(z)$ bestuderen.
Dan merk je dat het handiger is om uit te gaan van $z = r\,\text{e}^{\text{i}\varphi}$
...



Figuur 6

a Laat zien, dat $\text{e}^{1+\pi\text{i}} = -\text{e}$ en dat $\text{e}^{1+0{,}5\pi\text{i}} = \text{ei}$.

b Neem $z = x + \text{i}y$ en laat zien dat: $|f(z)| = \text{e}^x$ en $\arg(f(z)) = y$.

c Waarom is f een periodieke functie? Geef twee voorbeelden van complexe getallen die dezelfde functiewaarde hebben.

d Neem als domein $\text{D}_f = [-2,2] \times [-4,4]$ en teken het bijpassende bereik.

e Wat is het kleinste domein dat hetzelfde bereik heeft?

f Bekijk nu de complexe functie g met $g(z) = ln(z)$. Nu kun je complexe getallen het beste schrijven in de vorm $z = r\text{e}^{\text{i}\varphi}$. Laat zien dat $ln(\text{i}) = 0{,}5\pi$ en dat $ln(-1) = \pi$.

g Bereken nu exact: $g(1 + \text{i})$, $g(3\text{i})$ en $g(2 - 2\text{i})$.

h Neem als domein alle reële getallen met $|z| \leq 2$. Bepaal het bijbehorende bereik.

Testen

Opgave 13

Gegeven is de complexe functie f met $f(z) = \left(1 - \text{i}\sqrt{3}\right) z - \text{i}$.

a Bereken $f(0)$, $f(2)$, $f(3\text{i})$ en $f(2 + 3\text{i})$.

b Neem als domein $\text{D}_f = [-2,2] \times [-3,3]$ en beschrijf het bijpassende bereik.

c Door middel van welke afbeeldingen ontstaat dit bereik uit het gegeven domein?

d Voor welke waarde van z geldt: $f(z) = z$?

Opgave 14

De functie f heeft als domein alle complexe getallen waarvoor $|z| \leq 3$ en $-0{,}25\pi \leq \arg(z) \leq 0{,}25\pi$. Teken het bijpassende bereik als

a $f(z) = z^2$

b $f(z) = (3 + 4\text{i})\, z$

c $f(z) = 0{,}5\text{i}z + 3 - \text{i}$