# 2.4 Vergelijkingen

## Inleiding

Door het invoeren van de complexe getallen kun je opeens ook vergelijkingen als $x^2+1=0$ oplossen. In feite zijn alle kwadratische vergelijkingen nu op te lossen. Maar... het gaat nog veel verder: het is gebleken dat alle vergelijkingen van de vorm

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$

(met $n$ een positief geheel getal) precies $n$ oplossingen hebben als je complexe getallen gebruikt. (Wat niet wil zeggen dat je ze ook kunt vinden en er kunnen gelijke bij zijn!)
Dit heet de hoofdstelling van de algebra.

**Je leert in dit onderwerp**

- vergelijkingen van de vorm $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ oplossen met complexe getallen.

**Voorkennis**

- werken met complexe getallen, ook in de poolvoorstelling;
- de formule van Euler toepassen bij de schrijfwijze van complexe getallen;
- met complexe getallen rekenen.

## Verkennen

### Opgave V1

Je kent de abc-formule voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen.

**a** Los nu op: $x^2 + 2x + 2 = 0$. Welke twee complexe getallen vormen de oplossing?

**b** Je kunt ook vergelijkingen met hogere machten oplossen. Los op: $x^4 + 16x^2 = 0$.

## Uitleg

Van het oplossen van vergelijkingen met complexe getallen heb je al het nodige gezien. Sterker nog: complexe getallen zijn ingevoerd om vergelijkingen te kunnen oplossen die tot dan toe onoplosbaar waren.

De oplossing van $z^2 = -1$ is (per definitie): $z = -\text{i} \vee z = \text{i}$.

Maar hoe zit het nu met een vergelijking als $z^4 = -1$?
Welnu: daar helpt de formule van Euler.
Schrijf -1 in de poolvoorstelling $-1 = 1 \cdot \text{e}^{\pi \text{i} + k \cdot 2\pi \text{i}}$.
De vergelijking wordt dan $z^4 = 1 \cdot \text{e}^{\pi \text{i} + k \cdot 2\pi \text{i}}$.

Dit geeft $z = \left(1 \cdot \text{e}^{\pi \text{i} + k \cdot 2\pi \text{i}}\right)^{\frac{1}{4}} = 1 \cdot \text{e}^{0,25\pi \text{i} + k \cdot 0,5\pi \text{i}}$.

En dit levert maar liefst vier verschillende waarden voor $z$ op:

- $z_1 = 1 \cdot \text{e}^{0,25\pi \text{i}}$
- $z_2 = 1 \cdot \text{e}^{0,75\pi \text{i}}$
- $z_3 = 1 \cdot \text{e}^{1,25\pi \text{i}}$
- $z_4 = 1 \cdot \text{e}^{1,75\pi \text{i}}$

En als dat wordt gevraagd kun je deze antwoorden in de vorm $z = x + \text{i}\, y$ zetten. Je krijgt dan vaak wel benaderingen.

## Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe je de vergelijking $z^4 = -1$ wordt opgelost door gebruik te maken van $z = r \cdot e^{i\varphi}$.

**a** Bepaal zelf deze oplossing en schrijf alle vier de $z$-waarden in de vorm $x + i\,y$.

**b** Los op dezelfde manier op $z^4 = 1$.

## Opgave 2

Er zijn ook vergelijkingen waarin al meteen complexe getallen voorkomen, zoals $(1 + i)z = 2 - 2i$. Dergelijke vergelijkingen los je net zo op als je altijd gewend bent: met de balansmethode.

**a** Waarom is hier de oplossing $z = \frac{2-2i}{1+i}$?

**b** Meestal wil je een oplossing hebben in de vorm $x + i\,y$, pas dan heb je een complex getal als oplossing. Welke oplossing heeft deze vergelijking dus?

**c** Los ook met de balansmethode op: $(1 + i)z = 2z - 2i$

# Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

Je weet dat er zelfs eenvoudige vergelijkingen bestaan die niet oplosbaar zijn binnen de verzameling der reële getallen. Het allereenvoudigste voorbeeld daarvan is wel de vergelijking: $x^2 + 1 = 0$. Want immers van elk reëel getal $x$ is het kwadraat positief of 0 en dus nooit gelijk aan $-1$.

Er zijn wel complexe getallen te vinden waarvan het kwadraat negatief is. Bijvoorbeeld is: $i^2 = -1$.
In de verzameling der complexe getallen is de vergelijking $z^2 + 1 = 0$ dus wel oplosbaar:
$z^2 + 1 = 0$ geeft $z^2 = -1$ en daarom $z = i \vee z = -i$.

Zo hebben wiskundigen bewezen dat in het stelsel der complexe getallen elke vergelijking van de vorm:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

precies $n$ oplossingen heeft. Dit is de **hoofdstelling van de algebra**.

Het bewijs van deze stelling voert op dit moment te ver. Wel vind je hier een paar voorbeelden van het oplossen van vergelijkingen. Het gaat daarbij om het vinden van alle oplossingen, niet alleen maar de reële oplossingen.
Bij het oplossen zul je van de diverse schrijfwijzen van complexe getallen gebruik moeten maken.

### Voorbeeld 1

Bepaal alle oplossingen in het complexe vlak van de vergelijking $z^3 = -1$.

Antwoord

Het getal $-1$ is te schrijven als: $-1 = e^{\pi i}$.

Omdat $z = r\,e^{i\varphi}$, kun je de gegeven vergelijking schrijven als: $\left(r\,e^{i\varphi}\right)^3 = e^{\pi i}$, zodat $r^3\,e^{3i\varphi} = e^{\pi i}$.

Dit betekent dat: $r^3 = 1$ en dus $r = 1$.

En ook dat: $3\varphi = \pi + k \cdot 2\pi$ en dus $\varphi = \frac{1}{3} \cdot \pi + k \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi$ met $k \in \mathbb{Z}$.

Daarmee heb je drie oplossingen in het complexe vlak gevonden, te weten:

$$z_1 = 1\,e^{\frac{1}{3}\pi i} = 1\left(\cos\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{1}{3}\pi\right)\right) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,i$$

$$z_2 = 1\,e^{\pi i} = 1(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -1$$

$$z_3 = 1\,e^{\frac{5}{3}\pi i} = 1\left(\cos\left(\tfrac{5}{3}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{5}{3}\pi\right)\right) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,i$$

## Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je de vergelijking $z^3 = -1$ wordt opgelost door gebruik te maken van $z = r \cdot e^{i\varphi}$.

**a** Los op dezelfde manier op $z^3 = 1$.

**b** Los op dezelfde manier op $z^4 = -1$.

## Voorbeeld 2

Los de vergelijking $z^2 + 2z + 5 = 0$ op.

Antwoord

Deze vergelijking kun je oplossen met door kwadraat afsplitsen: $z^2 + 2z + 5 = 0$ wordt $(z+1)^2 - 1 + 5 = 0$ en dus $(z+1)^2 = -4$.

Omdat $-4 = 4\,i^2$ wordt de vergelijking $(z+1)^2 = 4\,i^2$.
Dus vind je twee complexe oplossingen: $z_1 = -1 + 2\,i$ en $z_2 = -1 - 2\,i$.
Deze vergelijking heeft geen reële oplossingen.

## Opgave 4

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je kwadratische vergelijkingen kunt oplossen door kwadraat afsplitsen. Je maakt dan gebruik van $i^2 = -1$.

**a** Leg uit waarom $-4 = 4\,i^2$.

**b** Laat zien hoe je zo de twee oplossingen vindt.

**c** Laat zien hoe je dit ook met de formule van Euler kunt doen.

**d** Laat zien hoe je de vergelijking in het voorbeeld ook met de abc-formule kunt oplossen.

**e** Los nu zelf op: $z^2 + 5z + 10 = 0$.

## Voorbeeld 3

Los de vergelijking $(z + 1 - i)^6 = -i$ op.

Antwoord

Deze vergelijking kun je op dezelfde wijze oplossen als die in het eerste voorbeeld.
Daartoe schrijf je: $z + 1 - i = r\,e^{i\,\varphi}$ en $-i = e^{1{,}5\pi\,i}$.

Wanneer je dit in de gegeven vergelijking stopt, vind je: $\left(r\,e^{i\,\varphi}\right)^6 = e^{1{,}5\pi\,i}$.

Dit betekent: $r^6 = 1$ en dus $r = 1$.

En ook: $6\varphi = 1{,}5\pi + k \cdot 2\pi$ zodat $\varphi = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$.

Ga dat zelf na. Hiermee kun je alle zes de complexe oplossingen vinden.

## Opgave 5

In **Voorbeeld 3** kun je zien hoe je de vergelijking $(z + 1 - i)^6 = -i$ oplost.

**a** Voer zelf die oplossing uit.

**b** Bepaal nu de zes complexe oplossingen van deze vergelijking.

**c** Controleer je antwoorden door invullen in de gegeven vergelijking.

### Opgave 6

Bij het oplossen van vergelijkingen waarin complexe getallen voorkomen gebruik je vaak al bekende oplossingstechnieken.

**a** Los op: $2z + 5\text{i} = 3\text{i}z - 4$.

**b** Los op: $\frac{z+1}{z-\text{i}} = 2$.

**c** Los op: $\frac{3}{z} = 2\text{i}$.

## Verwerken

### Opgave 7

Los op. Schrijf de oplossingen in de vorm $r \cdot \text{e}^{\varphi\,\text{i}}$.

**a** $z^5 = 1$

**b** $3z^3 = -24$

### Opgave 8

Los de volgende vergelijkingen exact op in $\mathbb{C}$.

**a** $z^3 = \text{i}$

**b** $z^4 = -16$

**c** $z^2 = -\text{i}$

**d** $z^3 = -27\text{i}$

**e** $z^4 = -8 + 8\text{i}\sqrt{3}$

**f** $\text{i}z^2 = 0{,}5$

### Opgave 9

Los de volgende vergelijkingen op in $\mathbb{C}$. Geef waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

**a** $(z - \text{i})^4 = 1$

**b** $3z^2 + z + 3 = 0$

**c** $z^2 = 8 + 6\text{i}$

**d** $(z + 1 - 2\,\text{i})^3 = -2\sqrt{3} + 2\,\text{i}$

**e** $2z^2 + 4\text{i}z = 1$

**f** $z^8 + 15z^4 - 16 = 0$

### Opgave 10

Los de volgende vergelijkingen exact op in $\mathbb{C}$.

**a** $3z + 2\text{i} = 4\text{i}z$

**b** $(z - 1)^2 = 2\text{i}$

**c** $z^6 = -27$

**d** $(z + 4\text{i})(z - 4\text{i}) = 16$

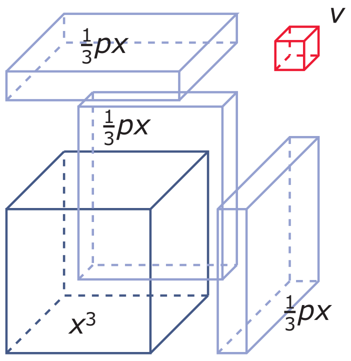
### Opgave 11

Los op $z^2 = \text{i}^{\text{i}}$.

## Toepassen

### Opgave 12: De formule van Cardano

De formule van Cardano is vergelijkbaar met de abc-formule, maar dan voor een vergelijking als $x^3 + px = q$. De oplossing uit de tijd van **Girolamo Cardano** (1501—1576) was meetkundig, hier zie je hem in beeld. Hij verdeelt $px$ in drie balken en bouwt zo door een kubusje met inhoud $v$ toe te voegen een kubus met inhoud $t$. Nu is $t–v = q$. Verder is $\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{v} = x$. En ook is $\sqrt[3]{t} \cdot \sqrt[3]{v} \cdot x = px$ de inhoud van één balkje, dus $t \cdot v = p^3$.



Figuur 1

Uit $t–v = q$ en $t \cdot v = p^3$ kun je afleiden dat $t = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$ en

$v = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$.

Hieruit vind je $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$.

Dit is de formule van Cardano, hoewel hij voor het eerst door Scipio del Ferro is ontdekt. Je vindt er één oplossing van de gegeven vergelijking mee.

**a** Schrijf zelf deze afleiding volledig uit.

**b** Bepaal hiermee een reële oplossing van de vergelijking $x^3 + 6x = 20$.

**c** Hoe kun je nu de twee complexe oplossingen vinden? Bepaal ze.

Deze methode werkt alleen als er geen $x^2$ in de derdegraadsvergelijking staat en de coëfficiënt voor $x^3$ gelijk is aan 1.

**d** Hoe kun je nu toch met behulp van de formule van Cardano een oplossing vinden voor een vergelijking van de vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$?

**e** Los exact op: $3x^3 + 11x^2 + 32x - 12 = 0$

## Testen

### Opgave 13

Los de volgende vergelijkingen op in $\mathbb{C}$. (Benaderingen in twee decimalen.)

**a** $(z - \mathrm{i})^3 = \mathrm{i}$

**b** $z^2 = \frac{1}{3-4\mathrm{i}}$

**c** $z^6 = 64\mathrm{i}$

**d** $\mathrm{i}z + 2 = 5 - \frac{2}{z}$

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.