2.3 De formule van Euler

Inleiding

De beroemde wiskundige Euler voerde veel van de moderne notaties voor wiskunde in. Hij bedacht de i-notatie van complexe getallen en voerde het getal e in. En hij was in staat om met behulp van deze twee constanten de complexe getallen in een zeer handzame vorm te schrijven.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- complexe getallen schrijven in de vorm $z = r \cdot e^{i\varphi}$;
- rekenen met complexe getallen in die vorm.

Voorkennis

- werken met complexe getallen in het complexe vlak;
- werken met modulus en argument bij de poolvoorstelling van een complex getal;
- het getal e gebruiken en exponentiële functies differentiëren.

Verkennen

Opgave V1

Je kunt elk complex getal schrijven in de poolvoorstelling $z = x + i\,y = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$.
Neem aan dat r een constante is en φ variabel, dan is $z = f(\varphi)$.
Neem ook aan dat je deze functie kunt differentiëren alsof i een constante is.

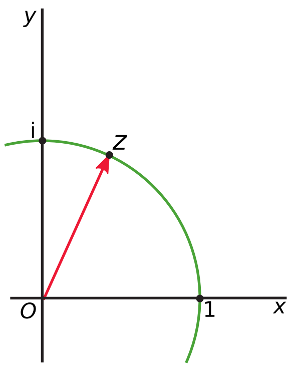
a Laat zien, dat $f'(\varphi) = i \cdot f(\varphi)$.

b Welke functie heeft dezelfde eigenschap als f?

Uitleg

Bekijk de applet

Elk complex getal kan worden geschreven als:
$z = x + i\,y = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$.
Wanneer $r = 1$ dan levert dit op: $z = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$.
Dit complexe getal ligt op een cirkel met straal 1 om de oorsprong van het complexe vlak. Als φ varieert van 0 tot 2π dan doorloopt het complexe getal die hele cirkel.



Figuur 2

Nu komt iets verrassends...
Stel, je vat $\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ op als functie van φ. Vervolgens ga je deze functie differentiëren met behulp van de regels die voor reële functies gelden. Je neemt aan dat i een constante is.
Dus: $f(\varphi) = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$
geeft: $f'(\varphi) = -\sin(\varphi) + i\cos(\varphi) = i(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$.
Kennelijk geldt $f'(\varphi) = i \cdot f(\varphi)$.
Nu is er een reële functie die gelijk is aan zijn eigen afgeleide, namelijk de e-macht.

Je zou kunnen opschrijven: als $g(\varphi) = e^{i\varphi}$ dan is $g'(\varphi) = i \cdot e^{i\varphi}$.
De functie f van hiervoor vertoont dan hetzelfde gedrag als $g(\varphi) = e^{i\varphi}$.
Euler bewees ook echt dat $f(\varphi) = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi) = e^{i\varphi}$.
Dit is de formule van Euler.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** de formule van Euler: $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$. Een bewijs van deze formule is door Euler gegeven, maar valt buiten het bestek van dit onderwerp.

a Waarom is er in de uitleg nog geen sprake van een echt bewijs van deze formule?

b Leg uit dat deze formule betekent dat je elk complex getal kunt schrijven als $z = r \cdot e^{i\varphi}$

c Schrijf $z = 2 + 2i$ in de vorm $z = r \cdot e^{i\varphi}$.

Opgave 2

Neem het complexe getal $z_1 = 1 - i$.

a Schrijf het complexe getal in de vorm $z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$.

Neem het complexe getal $z_2 = -1 + i$.

b Schrijf dit complexe getal in de vorm $z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$.

c Bereken $z_1 \cdot z_2$ met behulp van de schrijfwijze uit a en b.

d Bereken $z_1 \cdot z_2 = (1 - i)(-1 + i)$ door haakjes wegwerken.

e Laat zien dat beide antwoorden uit c en d overeen komen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

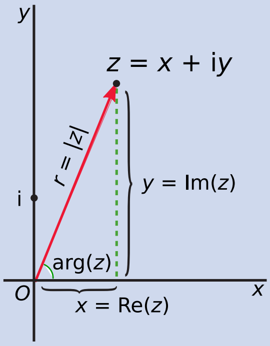
Voor elke waarde van φ geldt:

De **formule van Euler**:
$\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) = e^{i\varphi}$

Nu is elk complex getal op drie manieren te schrijven:

- $z = x + i\,y$
- $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$
- $z = r\,e^{i\varphi}$

waarin x het reële deel, y het imaginaire deel, r de modulus en φ het argument van het complexe getal in kwestie zijn.



Figuur 3

Met complexe getallen die zijn geschreven als e-macht is het vermenigvuldigen opeens heel eenvoudig geworden. Je gaat er daarbij van uit dat je de rekenregels voor het werken met reële e-machten nog steeds kunt toepassen. De vermenigvuldigingsregel is dan in die vorm eenvoudig te bewijzen. En datzelfde geldt voor de stelling van De Moivre...

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Schrijf $z = 3 + 4\,\mathrm{i}$ in de vorm $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$.

Antwoord

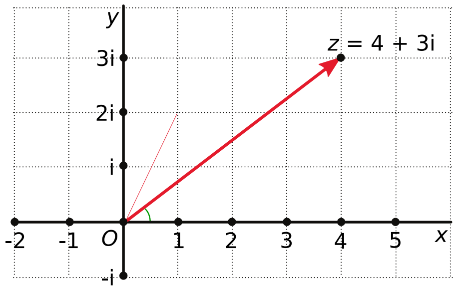
Maak de bijpassende vector met deze applet.

De lengte van die vector is $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

De hoek die deze vector met de positieve x-as maakt is $\arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0{,}93$.

Dus de modulus van z is 5 en het argument van z is $\mathrm{Arg}\,(z) \approx 0{,}93$.

En dus is $z = 5\,\mathrm{e}^{0{,}93i}$.



Figuur 4

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je $z = 3 + 4\mathrm{i}$ in de vorm $r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ zet.

a Maak z met de applet en ga na dat de waarden voor r en φ overeenstemmen met de berekende waarden.

b Schrijf $\overline{z}$ in de vorm $r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

Opgave 4

Neem nu $z = -4 + 2\mathrm{i}$.

a Maak z met de applet en lees $|z|$ en $\arg(z)$ uit de applet af.

b Bepaal $|z|$ en $\arg(z)$ ook door berekening.

c Schrijf z in de vorm $r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

d Oefen het schrijven van complexe getallen in de poolvoorstelling met deze applet.

Voorbeeld 2

Laat zien hoe je de formule van Euler gebruikt om de complexe getallen $z_1 = 3 + 4\,\mathrm{i}$ en $z_2 = 2{,}4 + \mathrm{i}$ te vermenigvuldigen en te delen.

Antwoord

Ga na (zie **Voorbeeld 1**) dat: $z_1 \approx 5\,\mathrm{e}^{0{,}93i}$.
Ga ook na, dat: $z_2 \approx 2{,}6\,\mathrm{e}^{0{,}39\,\mathrm{i}}$.
Je rekent met deze e-machten zoals met reële e-machten.

Nu is $z_1 \cdot z_2 \approx 5\,\mathrm{e}^{0{,}93\,\mathrm{i}} \cdot 2{,}6\,\mathrm{e}^{0{,}39\,\mathrm{i}} = 13\,\mathrm{e}^{1{,}32\,\mathrm{i}}$.

Dit levert hetzelfde resultaat als $z_1 \cdot z_2 = (3 + 4\,\mathrm{i})(2{,}4 + \mathrm{i}) = 3{,}2 + 12{,}6\,\mathrm{i}$.
Controleer dat zelf...

Verder is: $\frac{z_1}{z_2} \approx \frac{5 \cdot \mathrm{e}^{0{,}93\,\mathrm{i}}}{2{,}6 \cdot \mathrm{e}^{0{,}39\,\mathrm{i}}} = \frac{5}{2{,}6} \cdot \mathrm{e}^{0{,}93\,\mathrm{i} - 0{,}39\,\mathrm{i}} = \frac{25}{13}\mathrm{e}^{0{,}54\,\mathrm{i}}$.

Ga ook nu zelf na dat dit overeenkomt met $\frac{z_1}{z_2} = \frac{280}{169} + \frac{165}{169}\mathrm{i}$.

Opgave 5

Je kent de vermenigvuldigingsregel voor complexe getallen. In **Voorbeeld 2** zie je hoe vermenigvuldigen en delen gaat als je complexe getallen in de vorm $r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ schrijft.

a Voer de berekeningen in dit voorbeeld zelf uit.

b Oefen dit voor meerdere complexe getallen. Controleer je antwoorden met je grafische rekenmachine.

c Bewijs de regels voor vermenigvuldigen en delen van complexe getallen door ze in de vorm $r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ te schrijven.

Voorbeeld 3

Bereken $z = (3 + 4\,\mathrm{i})^4$ met behulp van de formule van Euler.

Antwoord

Stel eerst vast dat $3 + 4\,\mathrm{i} \approx 5\,\mathrm{e}^{0{,}93\,\mathrm{i}}$.

Dan is $z \approx \left(5\,\mathrm{e}^{0{,}93\,\mathrm{i}}\right)^4 = 5^4\left(\mathrm{e}^{0{,}93\,\mathrm{i}}\right)^4 = 625\,\mathrm{e}^{4 \cdot 0{,}93\,\mathrm{i}} = 625\,\mathrm{e}^{3{,}72\,\mathrm{i}}$.

Dit kun je schrijven als $z \approx -523{,}3 - 341{,}7\,\mathrm{i}$.

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** kun je zien hoe je met behulp van de formule van Euler de macht van een complex getal met de hand berekent.

a Loop zelf de berekening in het voorbeeld na.

b Bereken $(1 + \mathrm{i})^5$ op de manier van het voorbeeld.

c Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

d De stelling van De Moivre kun je bewijzen vanuit de formule van Euler. Laat zien hoe.

Voorbeeld 4

Bereken $z_1 = \sqrt{3 + 4\,\mathrm{i}}$ en $z_2 = \frac{1}{(3+4\,\mathrm{i})^4}$.

Antwoord

Stel eerst vast dat $3 + 4\,\mathrm{i} \approx 5\,\mathrm{e}^{0{,}93\,\mathrm{i}}$.

Dan is $z_1 = \sqrt{3 + 4\,\mathrm{i}} = (3 + 4\,\mathrm{i})^{0{,}5} \approx \left(5 \cdot \mathrm{e}^{0{,}93\,\mathrm{i}}\right)^{0{,}5} = 5^{0{,}5} \cdot \mathrm{e}^{0{,}5 \cdot 0{,}93\,\mathrm{i}} = \sqrt{5}\,\mathrm{e}^{0{,}46\,\mathrm{i}}$.

En dus is $z_1 \approx \sqrt{5}(\cos(0{,}46) + \mathrm{i}\sin(0{,}46)) = 2 + \mathrm{i}$.
(Het is wel zaak om niet tussentijds af te ronden!)

Verder is $z_2 = \frac{1}{(3+4\,\mathrm{i})^4} = (3 + 4\,\mathrm{i})^{-4} \approx \left(5\,\mathrm{e}^{0{,}93\,\mathrm{i}}\right)^{-4} = 5^{-4} \cdot \mathrm{e}^{-4 \cdot 0{,}93\,\mathrm{i}} = \frac{1}{625}\mathrm{e}^{-3{,}71\,\mathrm{i}}$.

En dus is $z_2 \approx \frac{1}{625}(\cos(-3{,}71) + \mathrm{i}\sin(-3{,}71)) = -0{,}0013 + 0{,}0009\,\mathrm{i}$.

(In vier decimalen nauwkeurig.)

Opgave 7

In **Voorbeeld 4** kun je zien hoe je met behulp van de formule van Euler wortels en negatieve machten van een complex getal met de hand berekent.

a Loop zelf de berekeningen in het voorbeeld na.

b Je kunt de eerste berekening in het voorbeeld makkelijk controleren door terug te rekenen. Laat dat zien.

c De stelling van De Moivre is met behulp van de formule van Euler uit te breiden tot willekeurige reële waarden van n. Licht dit toe.

Worteltrekken uit complexe getallen is lastiger dan uit het voorbeeld blijkt.
Er geldt namelijk: $3 + 4\,\mathrm{i} \approx 5\,\mathrm{e}^{0{,}93\,\mathrm{i} + k \cdot 2\pi}$.

d Laat zien dat hieruit volgt dat er eigenlijk twee complexe getallen zijn die de wortel uit $3+4\,\mathrm{i}$ kunnen zijn.

En het wordt nog erger. Ook de bekende rekenregels voor wortels leveren problemen op.

e Laat zien dat $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-12} \neq \sqrt{-3 \cdot -12}$.

Verwerken

Opgave 8

Schrijf de volgende complexe getallen in de vorm $r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

a 2

b i

c $3\mathrm{i}$

d $1 - \mathrm{i}$

e $-1 + \mathrm{i}$

f $-2 - 2\,\mathrm{i}$

Opgave 9

Gegeven is $z = (1 + \mathrm{i})\left(0{,}5\sqrt{3} + 0{,}5\,\mathrm{i}\right)$.

Schrijf z in de vorm $r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$ door gebruik te maken van de formule van Euler.

Opgave 10

Schrijf deze complexe getallen in de vorm $z = x + \mathrm{i}y$:

$z_1 = 2\mathrm{e}^{0{,}5\mathrm{i}}$; $z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}}$; $z_3 = 2\sqrt{3}\mathrm{e}^{\frac{5}{6}\pi\mathrm{i}}$; $z_4 = \mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}}$; $z_5 = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}$

Opgave 11

a Bereken $(2 - 2\mathrm{i})^5$ met behulp van de formule van Euler.

b Bereken $(2 - 3\mathrm{i})^5$ met behulp van de formule van Euler.

Opgave 12

Bereken met behulp van de formule van Euler: $z = \frac{2}{(1+\mathrm{i})^4}$.

Toepassen

Opgave 13: Sinus en cosinus als e-macht

Je kent nu de formule van Euler: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos(\varphi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi)$.

a Laat zien, dat $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = \cos(\varphi) - \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi)$.

b Toon nu aan dat $\cos(\varphi) = 0{,}5\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\varphi}\right)$.

c Leid een vergelijkbare formule af voor $\sin(\varphi)$.

Testen

Opgave 14

Bereken z met behulp van de formule van Euler.

a $z = \text{i}(3 - 5\text{i})$

b $z = \frac{1}{3-5\text{i}}$

c $z = (2 - \text{i})^5 (3 + 3\text{i})^2$

d $z = \frac{(1+\text{i})^2}{\sqrt{3}-\text{i}}$