2.2 Modulus en argument

Inleiding

Complexe getallen kun je voorstellen door vectoren in het complexe vlak. Bijvoorbeeld is het complexe getal $1 + 2\,\mathrm{i}$ te tekenen als vector $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ vanuit de oorsprong. Zo'n vector maakt een bepaalde hoek met de positieve x-as en heeft een bepaalde lengte. Die twee getallen kun je ook gebruiken voor de beschrijving van de vector.
Daarmee kun je dus complexe getallen weergeven met behulp van een hoek (het argument) en de lengte (de modulus). Je zult zien dat deze voorstelling van een complex getal vaak goed bruikbaar is.

Je leert in dit onderwerp

- complexe getallen weergeven met behulp van de hoek met de positieve x-as en de lengte;
- rekenen met complexe getallen in de poolvoorstelling;
- werken met de stelling van De Moivre.

Voorkennis

- de basisbegrippen van complexe getallen;
- complexe getallen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

Verkennen

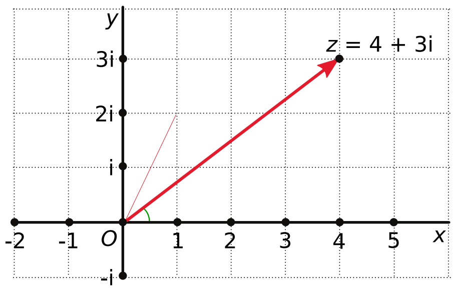
Opgave V1

Je ziet hier de vector die hoort bij het complexe getal $4 + 3\,\mathrm{i}$.

a Welke lengte heeft deze vector?

b Welke hoek maakt deze vector met de positieve x-as?

c Probeer het getal z nu te op te schrijven door gebruik te maken van deze lengte en deze hoek.

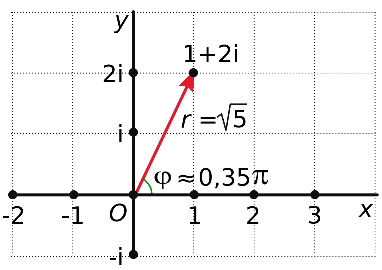


Figuur 1

Uitleg 1

Bekijk de applet

Een complex getal als $z = 1 + 2\,\mathrm{i}$ kun je voorstellen door de vector $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ vanuit de oorsprong van een Oxy-assenstelsel (het complexe vlak). Als je die vector tekent, dan zie je dat hij een hoek φ met de positieve x-as maakt en een bepaalde lengte heeft. Deze hoek heet wel het argument van z: $\arg(z)$. Als je aanneemt dat $-\pi < \varphi \leq \pi$ dan is dit de hoofdwaarde van het argument en schrijf je: $\mathrm{Arg}\,(z)$.



Figuur 2

Ga na, dat de lengte (de modulus) $|z|$ van deze vector $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ is en dat $\tan(\varphi) = \frac{2}{1} = 2$.

De bijbehorende hoek is ongeveer 1,11 rad.

$z = 1 + 2\,\mathrm{i}$ kun je benaderen door $z \approx \sqrt{5} \cdot \cos(1{,}11) + \mathrm{i} \cdot \sqrt{5} \cdot \sin(1{,}11)$

Op het eerste gezicht lijkt deze schrijfwijze (de **poolvoorstelling** van $1 + 2\mathrm{i}$) misschien niet erg handig. Maar dat wordt anders als je twee complexe getallen gaat vermenigvuldigen:
Je zult zien dat om het product van twee complexe getallen te vinden alleen hun lengtes hoeven te worden vermenigvuldigd en beide hoeken te worden opgeteld.

Met de applet kun je ook andere complexe getallen bekijken en omzetten naar de poolvoorstelling...

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** hoe je een complex getal kunt schrijven als: $z = r \cdot \cos(\varphi) + \mathrm{i} \cdot r \sin(\varphi)$. Hierin is φ de hoek die de bijbehorende vector met de positieve x-as maakt en r de lengte van die vector. Neem nu $z = 2 + 2\mathrm{i}$.

a Bepaal r en $\varphi = \arg(z)$.

b Waarom zijn er meerdere waarden voor φ mogelijk?

c Wat is $\mathrm{Arg}(z)$?

d Schrijf $z = 2 + 2\mathrm{i}$ in de vorm $z = r \cdot \cos(\varphi) + \mathrm{i} \cdot r \cdot \sin(\varphi)$.

Opgave 2

Neem het complexe getal $z_1 = 1 - 2\mathrm{i}$.

a Bepaal $\varphi = \arg(z_1)$ in radialen en in twee decimalen nauwkeurig.

b Schrijf het complexe getal in de vorm $z_1 = r \cdot \cos(\varphi) + \mathrm{i} \cdot r \cdot \sin(\varphi)$.

Neem het complexe getal $z_2 = \text{-}1 + 2\mathrm{i}$.

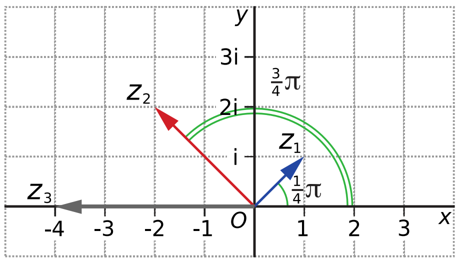
c Als je $\varphi = \arg(z_2)$ bepaalt met $\tan(\varphi) = \text{-}\frac{2}{1}$, krijg je niet meteen de goede hoek. Hoe komt dat?

d Schrijf dit complexe getal in de vorm $z_2 = r \cdot \cos(\varphi) + \mathrm{i} \cdot r \cdot \sin(\varphi)$.

Uitleg 2

Bekijk de applet

In de applet zie je hoe je twee complexe getallen vermenigvuldigt. Het lijkt er op dat bij het vermenigvuldigen de lengtes van z_1 en z_2 worden vermenigvuldigd, maar de argumenten (de hoeken) worden opgeteld. Dat dit in het algemeen het geval is kun je bewijzen vanuit de poolvoorstellingen van beide complexe getallen.
In het algemeen is: $z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1))$ en $z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_2))$.
Hierin is r de lengte en φ de hoek (tussen $\text{-}\pi$ en π) van het betreffende complexe getal.



Figuur 3

Door deze twee uitdrukkingen te vermenigvuldigen en de formules voor $\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$ en $\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$ toe te passen kun je bewijzen dat:

De **vermenigvuldigingsregel**:
Als je twee complexe getallen
$z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1))$ en $z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_2))$ vermenigvuldigt, dan krijg je
$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.
Je vermenigvuldigt dus de lengtes en telt de argumenten (hoofdwaarden van de hoeken) op.

Hieruit volgt meteen: als $z = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$ dan is $z^2 = r^2(\cos(2\varphi) + \mathrm{i}\sin(2\varphi))$.

Deze regel is door hem te herhalen uit te breiden naar (gehele positieve) machten van complexe getallen: $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi))$

Dit wordt wel de stelling van De Moivre genoemd.

Opgave 3

Bestudeer **Uitleg 2**.

a Bewijs de vermenigvuldigingsregel voor complexe getallen op de manier die in de uitleg wordt beschreven.

In de uitleg vind je ook de stelling van De Moivre. Hij volgt uit de vermenigvuldigingsregel voor complexe getallen. Neem $z = 1{,}5 + 2\text{i}$.

b Bereken z^2.

c Schrijf nu zowel z als z^2 in de poolvoorstelling. Controleer dat $\left|z^2\right| = |z|^2$ en $\arg\left(z^2\right) = 2 \cdot \arg(z)$.

d Leg nu uit waarom de stelling van De Moivre voor $n = 2$ uit de vermenigvuldigingsregel voor complexe getallen volgt.

e Doe het voorgaande ook met z^3 en leg uit waarom de stelling van De Moivre voor $n = 3$ uit de vermenigvuldigingsregel voor complexe getallen volgt.

f Waarom geldt $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z) + k \cdot 2\pi$ en dus de stelling van De Moivre?

g Bereken met de stelling van De Moivre $(2 + 0{,}5\,\text{i})^4$. Controleer het antwoord met je grafische rekenmachine.

Opgave 4

Dat complexe getallen kunnen worden gedeeld heb je al gezien. Net als bij vermenigvuldiging kun je eenvoudige regels afleiden voor het gedrag van modulus en argument daarbij: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ en $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

a Neem $z_1 = 1 + \text{i}\sqrt{3}$ en $z_2 = 1 - \text{i}$ en bereken $\frac{z_1}{z_2}$. Laat zien dat de beide regels opgaan.

b De regel voor het delen van complexe getallen kun je bewijzen op de wijze die in **Uitleg 2** staat beschreven voor de vermenigvuldigingsregel. Laat dat zien.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet

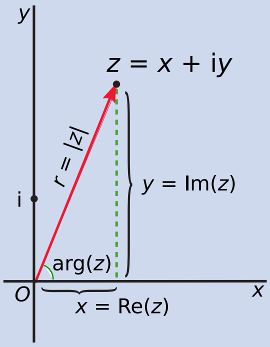
Elk complex getal kan worden geschreven in de vorm

$z = x + \text{i}\,y = r(\cos(\varphi) + \text{i}\sin(\varphi))$:

- $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ de **absolute waarde** of de **modulus** van z;
- φ is de hoek die de vector, die het complexe getal z voorstelt, maakt met de positieve x-as, het **argument** van z, notatie: $\arg(z)$.

Laat je voor φ alleen waarden toe vanaf $-\pi$ tot en met π, dan heb je de **hoofdwaarde van het argument**, notatie $\text{Arg}(z)$.

Het getal 0 is een beetje een uitzondering: dat getal heeft een absolute waarde van 0, maar er hoort geen argument bij. Verder hebben alle andere complexe getallen zowel een modulus (absolute waarde) als een argument.



Figuur 4

De hiervoor beschreven voorstelling van een complex getal als $z = r(\cos(\varphi) + \text{i}\sin(\varphi))$ noem je de **poolvoorstelling** van z.

Twee belangrijke stellingen:

De **vermenigvuldigingsregel**:
Als je twee complexe getallen z_1 en z_2 vermenigvuldigt, dan geldt:
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ en
$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

De **stelling van De Moivre**:
Voor elke waarde van φ en elk gehele getal n geldt:
$(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

Bepaal modulus en argument van $z = 3 + 4\,\mathrm{i}$.

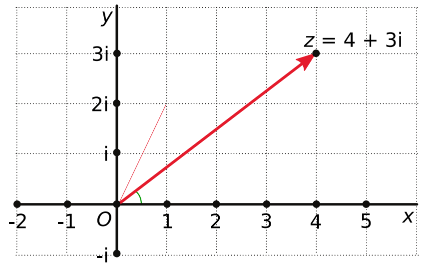
Antwoord

Bekijk de bijpassende vector.

De lengte van die vector is $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

De hoek die deze vector met de positieve x-as maakt is $\arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0{,}93$.

Dus de modulus van z is 5 en het argument van z is $\arg(z) \approx 0{,}93$.



Figuur 5

Met de TI-84 kun je de modulus en het argument van een complex getal meteen bepalen in het [MATH] CMPLX menu: je gebruikt dan angle(3+4i) voor de hoek en abs(3+4i) voor de modulus van bijvoorbeeld $3 + 4\,\mathrm{i}$. Andere grafische rekenmachines kennen vergelijkbare instellingen.

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je modulus en argument bepaalt van $z = 3 + 4\mathrm{i}$.

a Maak z met de applet. Lees $|z|$ en $\arg(z)$ uit de applet af.

b Controleer dat deze waarden overeenstemmen met de berekende waarden.

c Schrijf $z = 3 + 4\mathrm{i}$ in de poolvoorstelling.

d Schrijf $\overline{z}$ in de poolvoorstelling.

Opgave 6

Neem nu $z = -4 + 2\mathrm{i}$.

a Maak z met de applet en lees $|z|$ en $\arg(z)$ uit de applet af.

b Bepaal $|z|$ en $\arg(z)$ ook door berekening.

c Schrijf z in de poolvoorstelling.

d Oefen het schrijven van complexe getallen in de poolvoorstelling met deze applet.

Voorbeeld 2

Laat zien dat voor de complexe getallen $z_1 = 3+4\,\mathrm{i}$ en $z_2 = 2{,}4+\mathrm{i}$ de vermenigvuldigingsregel geldt.

Antwoord

Ga na (zie **Voorbeeld 1**) dat: $|z_1| = 5$ en $\arg(z_1) \approx 0{,}93$.
Ga ook na, dat: $|z_2| = 2{,}6$ en $\arg(z_2) \approx 0{,}39$.

Nu is $z_1 \cdot z_2 = (3+4\,\mathrm{i})(2{,}4+\mathrm{i}) = 3{,}2+12{,}6\,\mathrm{i}$.

Hiervoor geldt: $|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{3{,}2^2 + 12{,}6^2} = 13$ en $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arctan\left(\frac{12{,}6}{3{,}2}\right) \approx 1{,}32$.

Inderdaad geldt $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ en $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

Natuurlijk is dit nog geen bewijs voor de vermenigvuldigingsregel.

Het kan zijn dat $\arg(z_1) + \arg(z_2)$ op meer dan 2π uitkomt. In dat geval zullen $\arg(z_1 \cdot z_2)$ en $\arg(z_1) + \arg(z_2)$ verschillen. Neem je echter de hoofdwaarde van het argument, dan ontstaat dit probleem niet.

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** zie je hoe de vermenigvuldigingsregel voor complexe getallen wordt gecontroleerd.

a Voer zelf deze berekening uit zonder naar het voorbeeld te kijken.

b Neem $z_1 = 1+\mathrm{i}$ en $z_2 = 1-\mathrm{i}$ en controleer die vermenigvuldigingsregel ook met deze twee complexe getallen.

Voorbeeld 3

De stelling van De Moivre is handig bij het berekenen van machten van complexe getallen. Bereken op die manier $(3+4\,\mathrm{i})^4$.

Antwoord

Voor $z = 3+4\,\mathrm{i}$ geldt $|z| = 5$ en $\arg(z) \approx 0{,}93$.
Dus is $z \approx 5 \cdot (\cos(0{,}93) + \mathrm{i}\sin(0{,}93))$.

Dan is $z^4 \approx 5^4 \cdot (\cos(0{,}93) + \mathrm{i}\sin(0{,}93))^4$.

Volgens de stelling van De Moivre is

$(\cos(0{,}93) + \mathrm{i}\sin(0{,}93))^4 = \cos(4 \cdot 0{,}93) + \mathrm{i}\sin(4 \cdot 0{,}93) = \cos(3{,}72) + \mathrm{i}\sin(3{,}72)$.

En dus is $z^4 \approx 625 \cdot (\cos(3{,}72) + \mathrm{i}\sin(3{,}72)) \approx -523{,}3 - 341{,}7\,\mathrm{i}$.

Opgave 8

In **Voorbeeld 3** kun je zien hoe je met behulp van de stelling van De Moivre de macht van een complex getal met de hand berekent.

a Loop zelf de berekening in het voorbeeld na.

b Bereken $(1+\mathrm{i})^5$ op de manier van het voorbeeld.

c Controleer je antwoord met de grafische rekenmachine.

Verwerken

Opgave 9

LET OP! Het is de bedoeling dat je deze opgave handmatig doet. Gebruik de grafische rekenmachine alleen als controlemiddel! Bepaal modulus, argument en de hoofdwaarde van het argument van de volgende complexe getallen. Schrijf ze vervolgens in de poolvoorstelling.

a 1

b 2

c $1 + \mathrm{i}$

d i

e $-3\mathrm{i}$

f $-1 + \mathrm{i}$

g $1 - \mathrm{i}$

h $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}$

Opgave 10

Gegeven is $z = (1 + \mathrm{i})\left(0{,}5\sqrt{3} + 0{,}5\mathrm{i}\right)$.

Bereken exact: $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $|z|$, $\arg(z)$ en $\mathrm{Arg}(z)$.

Opgave 11

Toon aan, dat $\mathrm{Re}\,(z) \leq |z|$ voor elk complex getal z.

Opgave 12

Gegeven $z_1 = -2 + 1{,}5\mathrm{i}$ en $z_2 = 4 - 3\mathrm{i}$.

Laat zien dat voor deze twee complexe getallen de vermenigvuldigingsregel geldt.

Opgave 13

a Bereken $(2 - 2\,\mathrm{i})^5$ met behulp van de stelling van De Moivre.

b Bereken $z = (2 - 3\,\mathrm{i})^5$ met behulp van de stelling van De Moivre.

c Wat is het nadeel van het gebruik van deze stelling?

Opgave 14

Onder het toegevoegde complexe getal van een complex getal $z = x + \mathrm{i}y$ versta je het complexe getal $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$. Je kent dit als $\overline{z}$, de geconjugeerde van z.

a Toon aan, dat $z\,\overline{z} = |z|^2$

b Bewijs: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

c Bewijs: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

d Bewijs dat $z = \overline{z}$ alleen geldig is als z reëel is, maar dan ook altijd waar is.

Toepassen

Opgave 15: Driehoeksongelijkheid

Je weet vast wel, dat in een driehoek elke zijde korter is dan de som van de lengtes van de twee andere zijden. In de vlakke meetkunde heet dit de driehoeksongelijkheid.

Toon behulp van deze ongelijkheid aan, dat: $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Opgave 16: Verzamelingen complexe getallen

Je kunt een complex getal ook voorstellen als een punt in het complexe vlak. Teken daarin alle complexe getallen z waarvoor geldt:

a $|z| = 5$

b $|z - 2| = 2$

c $|z - \mathrm{i}| = 2$

d $|z - \mathrm{i}| = |z + 1|$

Testen

Opgave 17

Bereken modulus en argument van

a $z = \mathrm{i}(3 - 5\mathrm{i})$

b $z = \frac{1}{3-5\mathrm{i}}$

c $z = (2 - \mathrm{i})^5(3 + 3\mathrm{i})^2$

d $z = \frac{(1+\mathrm{i})^2}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$

Opgave 18

Vat een complex getal op als een punt in een xy-vlak. Teken de complexe getallen die voldoen aan:

a $|z + \mathrm{i}| = 3$

b $|z + \overline{z}| < 2$

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.