1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Soorten Getallen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- natuurlijk getal — geheel deel — tegengestelde — deelbaar — even/oneven getal — priemgetal
- breuk — rationaal getal — staartdeling — decimaal getal
- vermoeden — bewijs — stelling — direct/indirect bewijs — tegenvoorbeeld — bewijs uit het ongerijmde — implicatie — equivalentie — gelijkwaardige beweringen
- wortel — irrationaal getal — reëel getal
- de bewijsmethode van de volledige inductie

Activiteitenlijst

- natuurlijke en gehele getallen herkennen — schrijfwijzen bij verzamelingen gebruiken — ontbinden in priemfactoren
- rekenen met breuken — rationale getallen herkennen — een breuk omzetten naar een decimaal getal en omgekeerd
- kennismaken met bewijzen, zowel directe als indirecte bewijzen
- bewijzen dat een wortel soms geen rationaal getal is — werken met reële getallen
- de bewijsmethode van de volledige inductie gebruiken

Achtergronden

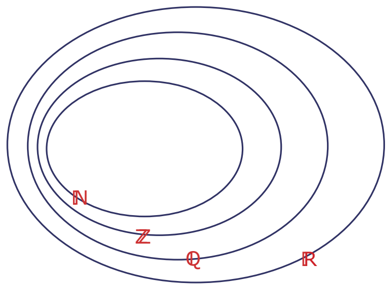
Getallen zijn en blijven fascinerend...
In de Oudheid geloofde men dat alle getallen door optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen uit de natuurlijke getallen konden worden afgeleid. De Pythagoreërs gingen zelfs zo ver dat ze veronderstelden dat het hele universum uit de natuurlijke getallen te herleiden was. Toen dan ook Hippasus van Metapontum (zelf een Pythagoreër) omstreeks 500 jaar v.Chr. bewees dat getallen zoals $\sqrt{2}$ geen natuurlijk getal kon zijn, werden zijn mede-Pythagoreërs zo kwaad dat ze hem wegens ketterij verdronken. Tenminste, zo gaat het verhaal...

Getallen als $\sqrt{2}$ gedragen zich echter nog behoorlijk netjes: als je ze kwadrateert, krijg je al weer een geheel getal. Ze heten wel **algebraïsche getallen** omdat ze de oplossing zijn van een veeltermvergelijking $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ met $a_n, a_{n-1}, ...$ gehele getallen en $a_n \neq 0$.
Nee, dan de echte jongens zoals π en e (het getal van Euler). Dat zijn pas vreemde objecten. Want zij zijn geen oplossingen van een veeltermvergelijking. En bijvoorbeeld is π niet als breuk te schrijven, is π^n nooit een geheel getal, en wat te denken van π^π?
Deze getallen heten **transcendente getallen** en ze werden voor het eerst in 1844 ontdekt door **Joseph Liouville** die het getal
$L = 0{,}110001000000000000000001...$ met een 1 op plek $n!$ (met $n = 1,2,3,...$) achter de komma bedacht en aantoonde dat dit getal niet de oplossing van een veeltermvergelijking is. In 1873 bewees **Charles Hermite** dat dit ook voor e geldt en in 1882 bewees **Carl Louis Ferdinand von Lindemann** dat π transcendent is. Op dit moment is het onderzoek naar transcendente getallen nog volop gaande...

Testen

Opgave 1

Bekijk het diagram waarin de verzamelingen van de natuurlijke getallen, de gehele getallen, de rationale getallen en de reële getallen zijn aangegeven.



Figuur 1

a Zet de getallen in het diagram: 0, $-\frac{1}{3}$, $\pi - 1$, $-\frac{18}{3}$, $\sqrt{1\frac{5}{9}}$, $\sqrt{1\frac{7}{9}}$, $\sqrt{196}$.

b Het getal i is de oplossing van de vergelijking $x^2 = -1$. Waar plaats je i in dit diagram?

Opgave 2

Bereken de g.g.d. en het k.g.v. van de getallen 13464 en 46035.
Schrijf de getallen eerst als het product van priemgetallen.

Opgave 3

Schrijf de getallen in de vorm $a + b\sqrt{6}$.

a $\left(1 + \sqrt{6}\right)^2$

b $\sqrt{54} - \sqrt{24} + \sqrt{36}$

c $\frac{3-2\sqrt{6}}{\sqrt{150}}$

Opgave 4

Bij breuken waarvan de noemer priem is, is het vaak veel werk om ze als (exact) decimaal getal te schrijven.

a Schrijf $\frac{5}{41}$ als decimaal getal.

b Schrijf $0{,}\overline{538461}$ in de vorm $\frac{p}{q}$ met $p,q \in \mathbb{Z}$.

Opgave 5

Bekijk het getal $\sqrt{10}$.

a Dit getal is het product van de twee irrationale getallen $\sqrt{2}$ en $\sqrt{5}$. Mag je op grond daarvan concluderen dat $\sqrt{10}$ irrationaal is?

b Bewijs de irrationaliteit van $\sqrt{10}$.

Opgave 6

Bewijs dat ${}^{5}\log(7)$ een irrationaal getal is.

Opgave 7

Bewijs met behulp van volledige inductie dat $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n = \frac{1}{2} \cdot \left(3^{n+1} - 1\right)$.

Toepassen

Opgave 8: Modulair rekenen

Een voorbeeld van modulair rekenen is klokrekenen met gehele urenaantallen: als je bij 9 uur 5 uur optelt, krijg je 14 uur, maar op de klok is dat weer 2 uur. Dat komt omdat je alleen rekent met de twaalf getallen 0,1,2,3,...,10,11. Zodra je bij 12 bent is dat weer 0, etc.
Je zegt wel $12 \equiv 0 \pmod{12}$. Uitspraak: “12 komt overeen met 0 modulo 12”.

a Noem nog drie getallen die overeenkomen met $0 \pmod{12}$.

b Waarom komen alle getallen van de vorm $3 + k \cdot 12$ met $k \in \mathbb{Z}$ overeen met $3 \pmod{12}$?

Alle getallen die overeen komen met $3 \pmod{12}$ vormen de **restklasse** $\overline{3}$.

c Welke getallen vormen de restklasse $\overline{4}$?

Je kunt $1314 + 967 \pmod{12}$ en $1314 \cdot 967 \pmod{12}$ op twee manieren berekenen: eerst de optelling / vermenigvuldiging uitvoeren en dan veelvouden van 12 weglaten of eerst veelvouden van 12 weglaten bij de afzonderlijke getallen 1314 en 967 en de bewerking uitvoeren.

d Toon aan dat dit geen verschil maakt.

e Bewijs dat $a \pm b \pmod m = a \pmod m \pm b \pmod m$ en $a + b \pmod m = a \pmod m + b \pmod m$.

Delen is bij restklassen een heel ander verhaal. Je komt dit bijvoorbeeld tegen bij het oplossen van eenvoudige vergelijkingen.

f Los op: $x + 5 \equiv 2 \pmod{12}$.

g Los op: $7x \equiv 3 \pmod{12}$.

h Welk probleem doet zich voor als je $2x \equiv 3 \pmod{12}$ wilt oplossen?

In de moderne **cryptografie (geheimschrift schrijven)** wordt van het rekenen met restklassen gebruik gemaakt. Alle symbolen worden dan omgezet naar hun bijbehorende **ASCII-code**, naar tweecijferige decimale getallen. Vervolgens kun je elk symbool versleutelen naar bijvoorbeeld $f(x) \equiv 12 \cdot x + 34 \pmod{97}$ waarin x de tweecijferige ASCII-code van het symbool voorstelt en f de zogenaamde encryptiefunctie is. Door mod 97 te werken gebruik je alleen de eerste 97 ASCII-tekens.

i Versleutel zo het woord WISKUNDE.

j Hoe kun je het vanuit het versleutelde woord de oorspronkelijke tekst weer terugvinden? Gaat dat gemakkelijk?

Opgave 9: Het vermoeden van Goldbach en andere openstaande kwesties

Het **vermoeden van Goldbach** is een tot nu toe onbewezen vermoeden over getallen. Nog nooit heeft iemand een tegenvoorbeeld gevonden voor dit vermoeden, maar een bewijs...?

Op 7 juni 1742 schreef **Christian Goldbach** een brief aan Euler. Hij beweert hierin:

> Elk even getal groter of gelijk aan 4 is te schrijven als de som van twee priemgetallen.

Tot nu toe heeft niemand een sluitend bewijs kunnen vinden...

Het is één van de vermoedens in de wiskunde die nog openstaan voor een bewijs, dus voel je uitgedaagd!

a Laat zien dat het vermoeden van Goldbach geldt voor de getallen 48 en 76. Probeer zelf nog maar een paar andere getallen.

b Waarom is het onmogelijk (ook als je veel helpers zou hebben met snelle computers voor het rekenwerk) om de stelling op deze manier te bewijzen?

c Zoek nog één of twee openstaande vraagstukken in de wiskunde en probeer er meer informatie over te verzamelen. Leg dit vast in een voor jou begrijpelijke tekst.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.