1.5 Dominoprincipe

Inleiding

Als een rij dominostenen zo staat opgesteld dat elke steen een opvolger raakt als hij omvalt, dan hoef je alleen de eerste steen een zetje te geven om de hele rij te laten vallen. Een belangrijke methode om stellingen te bewijzen die te maken hebben met de natuurlijke getallen, lijkt op dit 'dominoprincipe': Je toont aan dat een vermoeden klopt voor een bepaalde waarde. Daarna toon je aan dat als het klopt voor een bepaalde waarde, dat het dan ook klopt voor de volgende waarde.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de bewijsmethode van volledige inductie;
- deze bewijsmethode toepassen.

Voorkennis

- rekenen met getallen in het tientallig stelsel;
- haakjes wegwerken en ontbinden in factoren;
- verschillende soorten bewijzen herkennen.

Verkennen

Opgave V1

Over de beroemde wiskundige Carl Friedrich Gauss (1777-1855) gaat het verhaal dat hij als 11-jarige de opdracht kreeg om de getallen 1 tot en met 100 bij elkaar op te tellen in de veronderstelling dat hij daarmee wel even bezig zou zijn. Na enkele seconden te hebben nagedacht, wist Gauss meteen het antwoord 5050. Hij bedacht ter plekke dat je deze getallen kunt optellen door het eerste getal en het laatste getal op te tellen en dan de uitkomst te vermenigvuldigen met het halve aantal getallen.

a Ga na, dat deze methode inderdaad juist is.

b Welke formule volgt hier uit voor $1+2+3+...+n$? Kun je die formule bewijzen?

Figuur 2

Uitleg

Als een rij dominostenen zo staat opgesteld, dat elke steen een opvolger raakt als hij omvalt, dan hoef je alleen de eerste steen een zetje te geven om de hele rij te laten vallen.

Een belangrijke methode om stellingen te bewijzen die te maken hebben met de natuurlijke getallen, lijkt op dit 'dominoprincipe'. Je toont aan dat een vermoeden klopt voor een bepaalde waarde. Daarna toon je aan: als het klopt voor één waarde, dan klopt het ook voor de volgende waarde. Daarmee is je vermoeden bewezen.

Figuur 3

Je past deze methode toe op het volgende vermoeden:

Voor $n \in \mathbb{N}$ en $n \geq 1$ geldt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$.

- Je laat eerst zien: Het vermoeden geldt voor de kleinste n, hier $n = 1$ (je gooit de eerste steen om).

  Dit klopt inderdaad voor $n = 1$, want $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 + 1)$.

- Daarna laat je zien: Als het vermoeden geldt voor n, dan volgt daaruit dat het ook geldt voor $n+1$ (elke omvallende steen raakt zijn opvolger die dan ook omvalt).
- Dit betekent dat je moet aantonen:

  Als geldt: $1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ dan is ook waar: $1+2+3+\ldots+n+n+1=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ (n is vervangen door $n+1$).

Als je dat aantoont, is het vermoeden juist.

Dat doe je als volgt:

$1+2+3+\ldots+n+n+1=\frac{1}{2}n(n+1)+n+1$.

En $\frac{1}{2}n(n+1)+n+1$ kun je herleiden tot $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

Het vermoeden is dus juist.

Opgave 1

In de uitleg wordt het ‘dominoprincipe’ gebruikt om een stelling over natuurlijke getallen te bewijzen.

a Wat wordt in dit verband bedoeld met het dominoprincipe?

b In welke situaties kun je dit dominoprincipe in een bewijs gebruiken?

c Werk het voorbeeld door en toon nu zelf aan dat uit

$1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ volgt dat

$1+2+3+\ldots+n+n+1=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

d Ga na dat uit de bewezen formule volgt: $1+2+3+\ldots+99+100=5050$

Opgave 2

Je kunt de stelling $1+2+3+\ldots+n-1+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ ook anders bewijzen.

Zet $1+2+3+\ldots+n-1+n$ en $n+n-1+\ldots+3+2+1$ onder elkaar en tel ze op. Hoe gaat het bewijs dan verder?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Sommige beweringen hebben de vorm:

Voor alle waarden van n vanaf n_0, waarbij $n\in\mathbb{N}$ geldt...

Deze beweringen kun je soms bewijzen met behulp van **volledige inductie**. Inductie betekent: vanuit het bijzondere het algemene afleiden.

Het werkt als volgt:

- Je bewijst dat de bewering waar is voor $n=n_0$.
  (Het bijzondere: je duwt de eerste steen om.)
- Je bewijst dat voor elke $n\geq n_0$ geldt:
  Als de bewering waar is voor n, dan is hij ook waar voor $n+1$.
  (Het algemene: als de eerste steen omvalt, gaat de rest ook om.)

Voorbeeld 1

Toon aan met het dominoprincipe:

Voor elke $n \in \mathbb{N}$ is $n^3 - n$ deelbaar door 3.

Antwoord

Gebruik de bewijsmethode van volledige inductie:

- De kleinste n is 0. Daarvoor klopt het, want $0^3 - 0 = 0$ en dat is deelbaar door 3.
- Nu moet je aantonen:
  Als $n^3 - n$ deelbaar is door 3, dan geldt ook:
  $(n+1)^3 - (n+1)$ is deelbaar door 3.
  Dat gaat als volgt:
  Maak uit de uitdrukking $(n+1)^3 - (n+1)$ de uitdrukking $n^3 - n$ vrij:
  $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = n^3 - n + 3(n^2 + n)$
  Bekijk nu het tweede deel van de uitdrukking: $3(n^2 + n)$. Dat is deelbaar door 3.

Conclusie:
Als $n^3 - n$ deelbaar is door 3, dan is
$n^3 - n + 3(n^2 + n)$ deelbaar door 3 en omdat dat gelijk is aan
$(n+1)^3 - (n+1)$, is dat ook deelbaar door 3.

Omdat het vermoeden voor $n = 0$ klopt, klopt het dus voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 3

Bekijk een drietal beweringen.

- $1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2}$
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4}$
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 2 - \frac{1}{8}$

Je kunt er regelmaat in ontdekken.

a Ga na dat deze beweringen correct zijn.

b Hoe zou de volgende bewering in deze serie luiden?

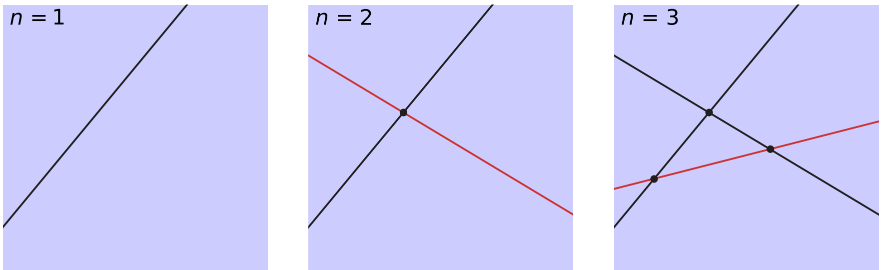
c Formuleer een algemene regel en bewijs die regel met behulp van volledige inductie.

Voorbeeld 2

Bewijs: het aantal delen waarin het vlak verdeeld wordt door n lijnen die elkaar twee aan twee snijden, is $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$.

Antwoord

Teken dit om in te zien dat het toevoegen van de lijn met nummer n betekent dat er precies $n - 1$ snijpunten bijkomen. De lijn met nummer n snijdt namelijk met alle lijnen die er al staan. Het betekent ook dat er n nieuwe delen bijkomen. Het is bijvoorbeeld zo dat bij $n = 3$ dat het deel links van het linker snijpunt in tweeën wordt verdeeld, zo ook tussen de twee snijpunten in en rechts van het rechter snijpunt. Zo worden er dus n nieuwe delen gemaakt.



Figuur 4

Gebruik volledige inductie:

- Voor $n = 1$ klopt de stelling:

  met 1 lijn zijn er $\frac{1}{2}\left(1^2 + 1 + 2\right) = 2$ delen.

- De stelling geldt voor $n \Rightarrow$ de stelling geldt voor $n + 1$:

  Bij n lijnen zijn er $\frac{1}{2}\left(n^2 + n + 2\right)$ delen.

  Voeg je de lijn met nummer $n + 1$ toe, dan komen er ook $n + 1$ nieuwe delen bij.

  Bij $n + 1$ zijn er dus $\frac{1}{2}\left(n^2 + n + 2\right) + n + 1$ delen. Dit moet gelijk zijn aan $\frac{1}{2}\left((n+1)^2 + (n+1) + 2\right)$ delen. Door de haakjes weg te werken, zie je dat het klopt.

Q.e.d.

Opgave 4

In het voorbeeld wordt het principe van volledige inductie toegepast op een meetkundig probleem.

a Laat met behulp van één of meer tekeningen zien dat de stelling geldt voor $n = 2$.

b Laat met behulp van één of meer tekeningen zien dat de stelling geldt voor $n = 3$.

c Waarom is het nodig dat er geen drie lijnen door één punt gaan?

d Voeg aan je figuur (of figuren) een vierde lijn toe. Hoeveel vlakdelen komen er dan bij?

e Waarom komen er bij de $(n + 1)$-de lijn $n + 1$ vlakdelen bij?

f Loop nu zelf het bewijs van de stelling na.

Opgave 5

Teken je op een cirkel n punten op gelijke afstanden van elkaar, dan zijn dat hoekpunten van een regelmatige n-hoek. Het gaat om het aantal diagonalen van zo'n regelmatige n-hoek.

a Neem $n = 3$. Hoeveel diagonalen zijn er?

b Neem $n = 4$. Hoeveel diagonalen zijn er?

c Neem $n = 5$. Hoeveel diagonalen zijn er?

d Laat zien dat het aantal diagonalen bij $n = 6$ gelijk is aan $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 - 6$.

e Bewijs met behulp van volledige inductie dat het aantal diagonalen in een regelmatige n-hoek gelijk is aan $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1) - n$.

Verwerken

Opgave 6

Je ziet een drietal beweringen.

- $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
- $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$
- $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$

Je kunt regelmaat ontdekken.

a Ga na dat deze beweringen waar zijn.

b Hoe zou de volgende bewering in deze serie luiden?

c Formuleer een algemene regel en bewijs die regel met behulp van volledige inductie.

Opgave 7

Bewijs met volledige inductie dat $1+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Opgave 8

a Bewijs: Als 100 deelbaar zou zijn door 3, dan zou 10 ook deelbaar zijn door 3.

b Bewijs dat $23^{500}-23^{100}$ deelbaar is door 10.

Opgave 9

Bewijs dat 9^n-1 voor alle $n \geq 1$ deelbaar is door 8.

Opgave 10

Bewijs met volledige inductie dat als r een reëel getal is met $r \geq -1$ voor elk natuurlijk getal n geldt: $(1+r)^n \geq 1+n \cdot r$.

Opgave 11

Bewijs met volledige inductie dat $3^{2n+1}+2^{n-1}$ een zevenvoud is.

Toepassen

Opgave 12: Graankorrels op het schaakbord

Ibn Kallikan (omstreeks 1256) heeft het verhaal van Sissa ben Dahir opgetekend. Voor de uitvinding van het schaakspel vroeg Sissa aan de Indiase koning Shirham de hoeveelheid graan die verzameld zou worden als men op het eerste veld van het schaakbord één graankorrel zou leggen, op het tweede het dubbele aantal, op het derde weer het dubbele tot en met het 64^e^ veld. De koning zei: “En is dat alles wat je hebben wilt, Sissa, jij dwaas? Je krijgt het meteen mee!”. Maar Sissa zei: “Vergis u niet, dit zijn in totaal 18446744073709551615 graankorrels. Genoeg om heel India met een laag graan van 1 voet dikte te bedekken!”

a Hoeveel graankorrels liggen er op de eerste vier vakjes van het schaakbord samen? Laat zien dat $1+2+4+8=2^4-1$.

b Laat zien dat voor het aantal graankorrels op de eerste vijf vakjes samen geldt: $1+2+2^2+2^3+2^4=2^5-1$.

c Het aantal graankorrels op de eerste vijf vakjes kun je ook afleiden door bij het totaal van de graankorrels op de eerste vier vakjes nog 2^4 op te tellen. Laat zien dat $2^4-1+2^4=2^5-1$.

d Bewijs met volledige inductie dat $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$ als $n \in \mathbb{N}$ en $n \geq 1$.

e Klopt het aantal graankorrels dat Sissa noemde?

Opgave 13: Wortels construeren

Uit de Griekse Oudheid stamt de stelling: ‘Als je een lijnstuk van lengte 1 hebt, kun je met passer en liniaal een lijnstuk met lengte $\sqrt{n}$ construeren, waarbij n een natuurlijk getal is.’

a Laat zien dat dit waar is voor $n = 2$. Denk erom dat je alleen liniaal en passer gebruikt en geen gradenboog.

b Laat zien dat uit de lijnstukken met lengte 1 en $\sqrt{2}$ een lijnstuk met lengte $\sqrt{3}$ te construeren is.

c Bewijs de stelling.

Testen

Opgave 14

Bewijs met volledige inductie dat $1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

Opgave 15

Bewijs met behulp van het dominoprincipe dat de som van de hoeken van een n-hoek met hoeken kleiner dan 180° gelijk is aan $(n-2) \cdot 180$. Waarom is het nodig dat alle hoeken kleiner dan 180° zijn?

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@xs4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.