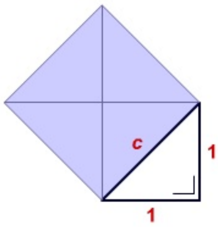
1.4 Reële getallen

Inleiding

De rationale getallen zijn gesloten voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, want de som, het verschil, het product en het quotiënt van twee rationale getallen is telkens weer een rationaal getal. Je zou zeggen: goed geregeld zo.
Maar ja, de stelling van Pythagoras gooide al meer dan twee millennia geleden roet in het eten.
De hypotenusa (schuine zijde) van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van 1 heeft een lengte van $c = \sqrt{2}$ en... dat is geen rationaal getal.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip reëel getal kennen;
- bewijzen dat veel wortels geen rationale getallen zijn;
- de beperkingen van de reële getallen kennen.

Voorkennis

- rekenen met getallen in het tientallig stelsel;
- haakjes wegwerken en ontbinden in factoren;
- verschillende soorten bewijzen herkennen.

Verkennen

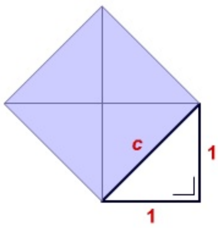
Opgave V1

Bekijk de figuur.

a Laat zien dat $c = \sqrt{2}$ en benader de lengte van c met de grafische rekenmachine.

b Waarom kan deze waarde van $\sqrt{2}$ nooit kloppen?

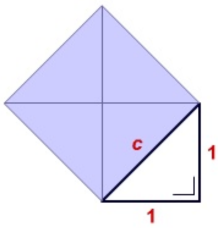
c Door inklemmen kun je $\sqrt{2}$ tot op zo veel decimalen bepalen als je maar wilt. Kom je ooit op een rationaal getal uit?



Figuur 2

Uitleg 1

De hypotenusa (schuine zijde) van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 1 heeft een lengte van $\sqrt{2}$ (c in de afbeelding).
Hoe kun je dit getal als breuk of decimaal getal schrijven?
Dit deden de Babyloniërs in de Oudheid op de volgende manier: Ze probeerden van een vierkant met oppervlakte 2 de lengte van de zijden te berekenen. Ze begonnen met een rechthoek met oppervlakte 2. Met een zijde van bijvoorbeeld 1,5 moet de andere zijde $\frac{2}{1{,}5} = 1{,}333...$ zijn. Van beide getallen neem je het gemiddelde, ongeveer 1,41667. Dit getal gebruik je als lengte van de ene zijde, de andere zijde is net zoals bij de eerste poging $\frac{2}{1{,}41667}$. Het gemiddelde van deze twee getallen is 1,41422, enzovoort.



Figuur 3

Op deze manier vond men de waarde van $\sqrt{2}$ in wel tien decimalen nauwkeurig.

Maar omdat er geen herhaling van decimalen optrad, ontstond het vermoeden dat $\sqrt{2}$ geen rationaal getal is, wat betekent dat het niet als breuk te schrijven is.

En inderdaad werd al in de Oudheid het bewijs geleverd dat $\sqrt{2}$ geen rationaal getal is.

Opgave 1

In de uitleg wordt het getal $\sqrt{2}$ nader bekeken. We kijken nu naar $\sqrt{3}$.

a Waarom kun je $\sqrt{3}$ nooit precies als decimaal getal schrijven? (Tip: bedenk wat er gebeurt als je een getal met een eindig aantal decimalen kwadrateert). Benader $\sqrt{3}$ met de grafische rekenmachine. Als je tijd hebt, probeer het dan eens op de manier uit de Oudheid.

b Waarom weet je op grond hiervan nog steeds niet zeker dat $\sqrt{3}$ geen rationaal getal kan zijn?

c En hoe zit dat met bijvoorbeeld $\sqrt{4}$? En met $\sqrt{5}$?

d Wanneer is de wortel uit een getal in ieder geval een rationaal getal?

Opgave 2

Je kunt met behulp van de rekenmachine wel meer (verborgen) decimalen van wortels te zien krijgen.

Verzin een manier om dit te doen en bepaal $\sqrt{2}$ in dertien decimalen nauwkeurig.
Treedt er herhaling van de decimalen op?

Uitleg 2

Het getal $\sqrt{2}$ kun je niet als breuk schrijven en is dus geen rationaal getal. Dat kun je bewijzen met een bewijs uit het ongerijmde.

Stel $\sqrt{2}$ is wel rationaal en is wel te schrijven als rationaal getal:

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ waarin $\frac{p}{q}$ een niet te vereenvoudigen breuk van twee gehele getallen is.

Dan is: $2 = \frac{p^2}{q^2}$ en dus $p^2 = 2q^2$.

Dus p^2 moet deelbaar zijn door 2.
Dit kan alleen als p deelbaar is door 2. Dus $p = 2a$.

En dan is $(2a)^2 = 2q^2$, zodat $4a^2 = 2q^2$ en $2a^2 = q^2$.

Dus is ook q^2 deelbaar door 2 en is q deelbaar door 2, dat wil zeggen $q = 2b$.

Maar dan is $\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$. Kennelijk is de breuk die $\sqrt{2}$ voorstelt dan altijd te vereenvoudigen. Maar je ging ervan uit dat dit niet het geval was. Er ontstaat dus een tegenspraak. Daarom kan de aanname dat $\sqrt{2}$ als breuk geschreven kan worden niet juist zijn.

Q.e.d.

Opgave 3

In de uitleg is bewezen dat $\sqrt{2}$ geen rationaal getal is. Bekijk dat bewijs.

a In dit bewijs staat: dus p^2 moet deelbaar zijn door 2. Dit kan alleen als p deelbaar is door 2. Waarom is dat zo?

b Van wat voor type bewijs is hier sprake?

c Formuleer een vergelijkbaar bewijs voor de irrationaliteit van $\sqrt{3}$.

d Stel, je wilt de irrationaliteit van $\sqrt{4}$ op dezelfde manier bewijzen. Wat gaat er fout?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **reële getallen** $\mathbb{R}$ zijn alle denkbare decimale getallen.

De **irrationale getallen** zijn de reële getallen die niet rationaal zijn. De verzameling van de irrationale getallen heeft geen apart symbool.

Het getal $\sqrt{2}$ is niet als deling van twee gehele getallen te schrijven en is daarom een irrationaal getal.

Alleen de wortels uit kwadraten van gehele getallen en uit breuken waarvan teller en noemer beide een kwadraat van een geheel getal zijn, zijn rationale getallen.
Ook π is een irrationaal getal.

Omdat je de irrationale wortels op veel rekenmachines alleen kunt benaderen, is het belangrijk deze wortels in de berekening te laten staan. Indien wenselijk benader je pas op het eind van alle berekeningen door een (afgerond en dus niet precies) decimaal getal.

Voorbeeld 1

Uitdrukkingen waarin alleen veelvouden van $\sqrt{2}$ voorkomen, kunnen worden herschreven in de vorm $a + b \cdot \sqrt{2}$.
Zo kun je bijvoorbeeld breuken met wortels zo omschrijven, dat er geen wortel meer in de noemer staat.
Dit is belangrijk in situaties waarin je met exacte waarden wilt of moet blijven werken.

Je ziet een aantal voorbeelden.

- $3 + 5\sqrt{2} + \sqrt{8} = 3 + 5\sqrt{2} + \sqrt{4 \cdot 2} = 3 + 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3 + 7\sqrt{2}$
- $\left(2 - \sqrt{2}\right)^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 = 6 - 4\sqrt{2}$
- $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{18} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2}} + \sqrt{9 \cdot 2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 3{,}5\sqrt{2}$
- $\frac{3}{2+\sqrt{2}} = \frac{3}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{6-3\sqrt{2}}{4-2} = 3 - 1{,}5\ \sqrt{2}$

Opgave 4

Schrijf de volgende wortelvormen in de vorm $a + b\sqrt{3}$.

a $2\sqrt{3} + \sqrt{48} + 6\sqrt{27}$

b $\left(3 + \sqrt{3}\right)^2$

c $\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{27}}$

d $\left(6 - 2\sqrt{3}\right)\left(6 + 2\sqrt{3}\right)$

e $\frac{12}{6-2\sqrt{3}}$

f $\sqrt{243} - 2\sqrt{27} + \sqrt{81}$

Voorbeeld 2

Bewijs dat de som van een rationaal en een irrationaal getal een irrationaal getal is.

Antwoord

Laat a een rationaal en b een irrationaal getal zijn. Neem aan dat de stelling niet waar is. Dan is $s = a + b$ dus een rationaal getal. Bekijk nu $b = s - a$. Als zowel s als a rationaal is, dan is $s - a$ rationaal en b dus ook. Hierdoor is een tegenspraak ontstaan, omdat b irrationaal moet zijn. De aanname dat de stelling niet waar is, leidt tot een tegenspraak, dus de stelling is waar.

Opgave 5

Bewijs of weerleg met behulp van een tegenvoorbeeld.

a De som van twee irrationale getallen is irrationaal.

b Het product van een irrationaal getal en een rationaal getal, beide ongelijk aan 0, is irrationaal.

Voorbeeld 3

Je ziet hiernaast hoe je kunt worteltrekken zonder rekenmachine.

$\sqrt{441}$ is een geheel getal. De uitkomst kun je schrijven als $10a + b$.

En dan moet gelden: $(10a + b)^2 = 441$.

Werk nu de haakjes weg: $(10a + b)^2 = 100a^2 + 2 \cdot 10ab + b^2$
Schrijf dit als: $100a^2 + (2 \cdot 10a + b) \cdot b$
Nu moet waarschijnlijk gelden:
$100a^2 = 400$, waaruit volgt $a = 2$ en $(2 \cdot 10a + b) \cdot b = 41$, waaruit volgt $b = 1$.

Dus $\sqrt{441} = 21$.

Zoek weer het getal op de punten enz., tot je de gewenste benadering hebt:

$\sqrt{2\ 46{,}00\ 00} = 15{,}68$
$1^2 = 1$
1 46
25 x 5 = 1 25
21 00
306 x 6 = 18 36
2 64 00
3128 x 8 =

Figuur 4

Deze methode kun je ook gebruiken om de wortel te trekken van andere getallen, zelfs als die wortels niet geheel zijn.

Het verdelen van het getal in groepjes van twee (vanaf de komma) is nodig omdat het kwadraat van een tiental een honderdtal, van een honderdtal een tienduizendtal is, enzovoort. Op deze manier kun je wortels in meer decimalen berekenen dan de meeste rekenmachines.

Opgave 6

Je bent nu niet meer afhankelijk van een rekenmachine om wortels uit te rekenen in het aantal decimalen dat je wilt hebben.

a Bereken $\sqrt{961}$. Gebruik de methode die in het voorbeeld uitgelegd wordt.

b Bereken $\sqrt{3969}$.

c Leg uit hoe de berekening van wortels zonder rekenmachine gaat. Neem $\sqrt{133225}$ als voorbeeld. Licht toe hoe $(a + b)^2 - a^2 = (2a + b)b$ daarbij een rol speelt.

Verwerken

Opgave 7

Bewijs dat $\sqrt{7}$ een irrationaal getal is.

Opgave 8

Schrijf de volgende wortelvormen in de vorm $a + b\sqrt{7}$.

a $2\sqrt{112} - \sqrt{28} + 6\sqrt{49}$

b $\left(7 - 2\sqrt{7}\right)^2$

c $\sqrt{28} - 8\sqrt{\frac{1}{7}}$

d $\left(8 - 2\sqrt{7}\right)\left(8 + 2\sqrt{7}\right)$

e $\frac{14}{7-\sqrt{7}}$

f $\sqrt{252} - 2\sqrt{112} + \sqrt{2401}$

Opgave 9

Bewijs de irrationaliteit van $\sqrt[3]{2}$.

Opgave 10

Bewijs of weerleg (bijvoorbeeld door een tegenvoorbeeld te geven).

a Het quotiënt van twee irrationale getallen is irrationaal.

b Het quotiënt van een rationaal getal en een irrationaal getal is irrationaal.

Opgave 11

Bereken zonder rekenmachine.

a $\sqrt{13}$ in zes decimalen nauwkeurig.

b $\sqrt{4281346624}$ exact.

Toepassen

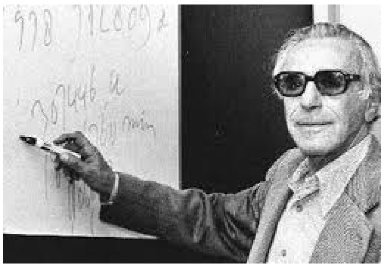
Opgave 12: Willy Wortel

Willem Klein (Amsterdam, 4 december 1912 - Amsterdam, 1 augustus 1986) was een rekenwonder met de artiestennaam Willy Wortel. Hij kon binnen één minuut uit zijn hoofd de wortel trekken uit een getal van 216 cijfers.

a Bereken $\sqrt{178929}$ zonder rekenmachine.

b Bereken $\sqrt{152399025}$ zonder rekenmachine.

c Geef een benadering in tien decimalen van $\sqrt{123456789}$.



Figuur 5

Testen

Opgave 13

Bewijs dat $\sqrt{5}$ een irrationaal getal is.

Opgave 14

Schrijf de volgende wortelvormen in de vorm $a + b\sqrt{5}$.

a $2\sqrt{20} - \sqrt{45} + 6\sqrt{180}$

b $\left(5 - 2\sqrt{20}\right)^2$

c $\sqrt{500} - 10\sqrt{\frac{1}{5}}$

d $\left(10 + 2\sqrt{5}\right)\left(10 - 2\sqrt{5}\right)$

e $\frac{100}{5-\sqrt{5}}$

f $\sqrt{4500} + 5\sqrt{2500} - \sqrt{2000}$

Opgave 15

Tussen twee willekeurige rationale getallen liggen oneindig veel rationale getallen. Maar hoeveel irrationale getallen liggen er tussen? Geef een irrationaal getal tussen (je moet laten zien dat het getal tussen beide gegeven getallen in ligt en irrationaal is):

a 1 en 2.

b 1,123 en 1,124.

c Twee willekeurige rationale getallen v en w.

Email: f.spijkers@math4all.nl