1.3 Bewijzen

Inleiding

Als je gehele getallen gaat delen, dan krijg je soms weer een geheel getal, maar vaak ook niet. Je zegt dan dat bepaalde getallen deelbaar zijn. Er is veel onderzoek gedaan naar de deelbaarheid van getallen. Er ontstonden dan 'vermoedens' die men probeerde te 'bewijzen'. Zo wist Euclides op zeer ingenieuze wijze te bewijzen dat er oneindig veel priemgetallen zijn en dat elk getal te schrijven is als een uniek product van priemgetallen. Hoe hij dat deed? Je ziet het in dit onderdeel.

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen k.g.v. en g.g.d. en met deze begrippen werken;
- de begrippen implicatie en equivalentie;
- het begrip bewijs (weer?) kennen en directe bewijzen leveren;
- indirecte bewijzen (bewijzen uit het ongerijmde) leveren.

Voorkennis

- rekenen met getallen in het tientallig stelsel;
- haakjes wegwerken en ontbinden in factoren.

Verkennen

Opgave V1

Als a een oneven geheel getal is, dan is $a^2 - 1$ deelbaar door 8.

a Ga dit eerst eens na voor een aantal gehele getallen. Waarom heb je dan nog geen bewijs?

b Probeer deze uitspraak te bewijzen.

Uitleg

Bekijk de volgende berekeningen:
$1^2 - 1 = 0$
$3^2 - 1 = 8$
$5^2 - 1 = 24$
$7^2 - 1 = 48$, enzovoort.

Je kunt je afvragen of geldt:
Als a een positief oneven getal is, dan is $a^2 - 1$ deelbaar door 8.

Je zoekt een overtuigende redenering.

Je bedenkt: $a = 2n + 1$, want a is oneven. n is een natuurlijk getal.

Dan is: $a^2 – 1 = (2n + 1)^2 – 1 = 4n^2 + 4n = 4\left(n^2 + n\right) = 4n(n + 1)$.

$a^2 - 1$ is in ieder geval een viervoud. Dat betekent dat $n(n + 1)$ deelbaar door 2 is.

Als n een even getal is, is $n(n + 1)$ ook even. Als n een oneven getal is, is $n + 1$ even en is $n(n + 1)$ opnieuw even. Q.e.d.*

*Q.e.d. staat voor 'quod erat demonstrandum' (Latijn voor 'wat te bewijzen was') en sluit traditiegetrouw een bewijs af.

Opgave 1

Als $n \cdot m$ oneven is, dan zijn n en m oneven.

Onderzoek of dit waar is voor n en m zowel even als oneven en zo ja, probeer dan een overtuigende redenering te vinden.

Opgave 2

Bekijk de stelling die in de **Uitleg** wordt geformuleerd. Er is nog een ander bewijs van deze stelling mogelijk. Denk eraan dat a oneven is.

a Ontbind $a^2 - 1$ in factoren.

b Leg uit waarom beide factoren even getallen zijn.

c Leg uit waarom één van die twee factoren een viervoud is.

d Bewijs hiermee de stelling.

Opgave 3

Bekijk de uitdrukking $x = 1$ als vergelijking.
Trek aan beide zijden x^2 af.
Je krijgt: $x - x^2 = 1 - x^2$.
Ontbinden geeft: $x(1 - x) = (1 - x)(1 + x)$.
Beide zijden delen door $1 - x$ geeft: $x = 1 + x$.
Omdat $x = 1$ wordt dit: $1 = 1 + 1 = 2$.
Je ziet hier een overtuigende redenering dat $1 = 2$.

Waar zit de fout in de redenering?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Als je op zoek bent naar eigenschappen van getallen vind je vaak door proberen wel een bepaalde regelmaat. Je krijgt dan een **vermoeden**.

Veel vermoedens hebben de vorm:
Als bewering A waar is, dan is bewering B ook waar.
Bijvoorbeeld: als a^2 even is, dan is a ook even. Je spreekt dan van een **implicatie** en je schrijft: a^2 is even $\Rightarrow$ a is even.

Om zeker te weten of dit vermoeden altijd geldig is, moet je een redenering geven die dit onomstotelijk aantoont. Zo'n overtuigende redenering noem je een **bewijs**.

Als een vermoeden is bewezen, is het een **stelling** geworden.

Er zijn verschillende soorten bewijzen:

- Een **direct bewijs**:
  Je laat door een waterdichte redenering zien dat bewering B inderdaad uit A volgt en dus dat de waarheid van A ook betekent dat B waar is.
- Een **indirect bewijs** of een **bewijs uit het ongerijmde**:
  Je gaat uit van de waarheid van A en je neemt aan dat B niet waar is. Vervolgens redeneer je door tot je een tegenspraak krijgt. Dan moet B dus waar zijn.

Verder zijn er verschillende soorten argumenten: algebraïsche methodes, figuren, meetkundige methodes, logische redeneringen, enzovoort. Alle wiskundig verantwoorde methodes zijn toegestaan.

Wanneer zowel 'als A, dan B' en 'als B, dan A' waar zijn, dan zijn A en B **gelijkwaardige beweringen**, ze zijn **equivalent**. Je schrijft dan: $A \Leftrightarrow B$.
Je bewijst zowel dat $A \Rightarrow B$ als dat $B \Rightarrow A$.

Onder het **kleinste gemeenschappelijke veelvoud** (**k.g.v.**) van twee positieve gehele getallen a en b versta je het kleinste getal dat deelbaar is door zowel a als b.

De **grootste gemeenschappelijke deler** (**g.g.d.**) van twee positieve gehele getallen a en b is het grootste gehele positieve getal waardoor zowel a als b kan worden gedeeld zonder dat er een rest overblijft.

Je schrijft $\text{kgv}(a,b)$ en $\text{ggd}(a,b)$. Je kunt het k.g.v. en de g.g.d. ook van meer dan twee getallen bepalen.

Voorbeeld 1

Bereken het k.g.v. (kleinste gemeenschappelijke veelvoud) van 25 en 70.

Bereken de g.g.d. (grootste gemeenschappelijke deler) van 132 en 96.

Antwoord

Je kunt het k.g.v. van 25 en 70 zo berekenen:

- Ontbind beide getallen in priemfactoren: $25 = 5 \cdot 5$ en $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$.
- Vermenigvuldig nu de priemfactoren, waarbij je de priemfactoren die in beide getallen zitten, maar één keer meerekent: $2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 350$.

Dus $\text{kgv}(25,70) = 350$.

Je kunt de g.g.d. van 132 en 96 zo berekenen:

- Ontbind beide getallen in priemfactoren: $132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$ en $96 = 2^5 \cdot 3$.
- Vermenigvuldig nu de priemfactoren die in beide getallen voorkomen: $2^2 \cdot 3 = 12$.

Dus $\text{ggd}(132,96) = 12$.

Opgave 4

Bekijk in **Voorbeeld 1** de berekening van het kleinste gemeenschappelijke veelvoud.

a Bereken $\text{kgv}(8,46)$.

b Welk getal is het k.g.v. van twee verschillende priemgetallen p en q?

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 1** de berekening van de grootste gemeenschappelijke deler.

a Bereken $\text{ggd}(a,0)$.

b Welke waarde heeft de g.g.d. van twee verschillende priemgetallen?

Opgave 6

Bewijs dat $\text{kgv}(a,b) = \frac{a \cdot b}{\text{ggd}(a,b)}$, waarbij a en b natuurlijke getallen zijn.

Tip: stel $\text{ggd}(a,b) = r$ en ontbind a en b.

Voorbeeld 2

Bewijs: a^2 is even $\Leftrightarrow$ a is even.

Antwoord

Dit zijn eigenlijk twee stellingen die allebei bewezen moeten worden:

- Als a een even geheel getal is $\Rightarrow$ a^2 ook even.
  Omdat a een even getal is, is er een geheel getal n waarvoor geldt: $a = 2n$. Kwadrateren geeft: $a^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$.
  Dus het kwadraat van een even getal is inderdaad deelbaar door 2.

- Als a^2 een even getal is $\Rightarrow a$ ook even.
  Het bewijs is: als a^2 is even, dan zijn er voor a twee mogelijkheden, namelijk a is even of a is oneven.
  Is a een oneven getal: $a = 2n+1$. Kwadrateren geeft: $a^2 = (2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 2\left(2n^2+2n\right)+1$.
  Dus het kwadraat van een oneven getal is inderdaad oneven. a kan niet oneven zijn.

Q.e.d.

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** wordt de gelijkwaardigheid bewezen van a^2 is even en a is even.

a Over welke twee stellingen heb je het dan?

b Bewijs nu zelf: a^2 is oneven $\Leftrightarrow a$ is oneven.

c Bewijs de juistheid, of toon met een tegenvoorbeeld de onjuistheid aan van de bewering:
a^3 is drievoud $\Leftrightarrow a$ is drievoud.

Voorbeeld 3

Bewijs: n is deelbaar door 2 en door 3 $\Leftrightarrow n$ is deelbaar door 6.

Antwoord

n is deelbaar door 2 betekent: $n = 2 \cdot p$, waarbij p een geheel getal is.
n is ook deelbaar door 3 betekent (omdat 2 niet deelbaar is door 3) dat p deelbaar is door 3: $p = 3 \cdot q$, waarbij q een geheel getal is. En daarom is: $n = 2 \cdot 3 \cdot q = 6 \cdot q$.
En dus is n deelbaar door 6.

Omgekeerd:
n is deelbaar door 6 betekent: $n = 6 \cdot q = 2 \cdot 3 \cdot q$.
En dit betekent dat n deelbaar is door zowel 2 als 3.

Q.e.d.

Opgave 8

Bekijk het bewijs in **Voorbeeld 3**. Als een getal deelbaar is door 12, dan is het ook deelbaar door 3 en deelbaar door 4.

a Bewijs dat dit waar is.

b Formuleer het omgekeerde van deze stelling en bewijs dat die stelling waar is.

c Formuleer deze stelling en het omgekeerde van deze stelling als één stelling.

Als een getal deelbaar is door 12, dan is het ook deelbaar door 2 en door 6.

d Bewijs dat dit waar is.

e Formuleer het omgekeerde van deze stelling en bewijs dat die stelling niet waar is.

f Kun je een algemene stelling formuleren en bewijzen?

Voorbeeld 4

Bewijs dat er oneindig veel priemgetallen zijn.
Het hier gegeven bewijs is een klassiek voorbeeld van een ‘bewijs uit het ongerijmde’. Het is afkomstig van Euclides.

Antwoord

Neem aan dat er een eindig aantal (n) priemgetallen is.
Noem die n priemgetallen: $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Bekijk nu het getal $a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$.
Dit getal is groter dan elk van de n priemgetallen.
Als je dit getal deelt door p_1, of p_2, of ..., of p_n, dan blijft er steeds een rest van 1 over.
Dus a is niet deelbaar door één van de priemgetallen $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

De hoofdstelling van de rekenkunde stelt dat elk natuurlijk getal groter dan 1 één of meer priemdelers heeft. Dit betekent:

- a is zelf een priemgetal

of

- a heeft een priemdeler die niet in p_1, p_2, ..., p_n zit.

In beide gevallen heb je een nieuw priemgetal. De stelling dat er maar eindig priemgetallen zijn, is dus onjuist. Hieruit volgt dat er inderdaad oneindig veel priemgetallen zijn.

Opgave 9

De volgende bewering ligt nogal voor de hand: ‘Als er tien duiven in negen duivenhokken zitten, is er minstens één duivenhok met minstens twee duiven.’

a Bewijs deze stelling indirect.

b Formuleer de stelling algemener. De stelling staat bekend als het duivenhokkenprincipe.

c Bewijs: Kies je uit de getallen 1,2,...,10 zes getallen, dan zijn er zeker twee getallen bij die minstens 11 als som hebben.

d In een zaal bevinden zich vijftig mensen. Ze kennen allemaal wel één of meer van de anderen in de zaal, maar hoeveel precies is onbekend. Bewijs dat er twee mensen in de zaal zijn, die hetzelfde aantal kennissen in de zaal hebben.

Opgave 10

In **Voorbeeld 4** zie je het bewijs van Euclides dat er oneindig veel priemgetallen zijn.

a Waarom is hier sprake van een ‘bewijs uit het ongerijmde’?

b Bewijs dat elk getal te schrijven is als het product van priemgetallen.

Verwerken

Opgave 11

a Wat is kgv (5,7)? En kgv (10,15)?

b Bereken kgv (140,504).

Opgave 12

a Bereken ggd (140,504).

b Bereken ggd (143,2541).

Opgave 13

Gegeven zijn de getallen 39 en 102.

a Bereken de g.g.d. van beide getallen.

b Bereken het k.g.v. van beide getallen.

Opgave 14

Bewijs dat $\left(n^3 - n\right)^2$ voor elk natuurlijk getal n deelbaar is door 9.

Opgave 15

Je wilt bewijzen dat $n^5 - n$ voor elk natuurlijk getal n deelbaar is door 30.

a Toon aan dat van elke drie opeenvolgende natuurlijke getallen er altijd één even is en één een drievoud is.

b Bewijs deze bewering.

Toepassen

De grootste gemeenschappelijke deler van twee getallen is het grootste getal dat beide getallen zonder rest deelt. Euclides vond een manier om de g.g.d. van twee getallen a en b te vinden. Dit wordt het **algoritme van Euclides** genoemd. Het gaat als volgt:

1. Noem het grootste van de beide getallen A, het andere B.
2. Trek B net zo vaak van A af totdat er 0 overblijft of een getal kleiner dan B.
3. Wanneer er 0 overblijft, is B de g.g.d.
4. Zo niet, herhaal dan het algoritme met B en wat er van A over is.

Opgave 16

Bekijk in **Toepassen** hoe het algoritme van Euclides in elkaar zit.

a Stel er zijn twee getallen, a en b, die als g.g.d. het getal p hebben.

Bewijs dat uit $a - q \cdot b = r$ volgt dat $\text{ggd}(a,b) = \text{ggd}(b,r)$.

b Bereken nu op deze manier $\text{ggd}(140,504)$.

c Bereken met behulp van het algoritme van Euclides $\text{ggd}(143,2541)$.

Opgave 17

Een kangoeroe springt vanuit 0 over de getallenlijn met sprongen van 39 of 102 naar links of naar rechts. Hoe kan deze kangoeroe weer op 0 uitkomen?

Testen

Opgave 18

Bewijs of toon de onjuistheid aan van de bewering: a is oneven $\Leftrightarrow$ a^3 is oneven.

Opgave 19

Gegeven zijn de getallen 33 en 91.

a Bereken de g.g.d. van beide getallen.

b Bereken het k.g.v. van beide getallen.

c Een kangoeroe springt vanuit 0 over de getallenlijn met sprongen van 33 of 91 naar links of naar rechts. Bepaal hoe deze kangoeroe op 1 kan uitkomen.

Opgave 20

Bewijs dat een geheel getal deelbaar is door 3 als de som van zijn cijfers deelbaar is door 3.