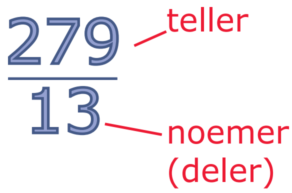
1.2 Rationale getallen

Inleiding

Als je gehele getallen gaat delen, dan krijg je soms weer een geheel getal, maar meestal komt de deling ‘niet uit’ en blijft er een rest over. Vaak werk je dan met een breuk. Dat is een schrijfwijze (waarin de deling nog zichtbaar is) voor een getal dat meestal niet meer geheel is. Het delen geeft dus aanleiding tot het invoeren van nieuwe getallen, namelijk de verzameling van alle getallen die je als breuk kunt schrijven. Omdat je elk geheel getal ook als breuk kunt schrijven, vormen die een deel van deze nieuwe verzameling getallen. Binnen deze nieuwe verzameling getallen zitten ook altijd de som, het verschil, het product en het quotiënt van twee breuken.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de rationale getallen kennen;
- nagaan dat som, verschil, product en quotiënt van twee breuken weer een breuk vormen;
- rationale getallen schrijven als decimale getallen.

Voorkennis

- rekenen met getallen in het tientallig stelsel;
- haakjes uitwerken en ontbinden in factoren.

Verkennen

Opgave V1

Rekenen met breuken zonder rekenmachine kun je vast nog wel.

a Schrijf de volgende breuken in de vorm $a\frac{b}{c}$ met a, b en c geheel en a zo groot mogelijk: $\frac{279}{13}$ en $\frac{98}{17}$.

b Schrijf $\frac{279}{13}$ als decimaal getal.

Uitleg

Verdeel je € 279,00 onder 13 personen, dan deel je 279 door 13.

Dat levert de breuk $\frac{279}{13}$ op.

Je kunt nu met behulp van bijvoorbeeld een staartdeling nagaan of dit een geheel getal oplevert of niet:

279/13 = 21,...
<u>273</u>
  6,0

Je ziet dat deze getallen niet deelbaar zijn: $\frac{279}{13} = 21 + \frac{6}{13}$.

Dit schrijf je als $21\frac{6}{13}$.

Bij een staartdeling kun je doorrekenen om meer decimalen te vinden. Je vindt: $21\frac{6}{13} = 21{,}461538461538461538461538461538461538...$

Je ziet een herhaling van steeds hetzelfde groepje decimalen. Je schrijft $21\frac{6}{13} = 21{,}\overline{461538}$. De streep staat boven het rijtje decimalen dat steeds wordt herhaald.

Opgave 1

Deel 51 door 7.

a Welke breuk krijg je dan? Haal de gehelen uit de breuk..

b Schrijf deze breuk als decimaal getal met behulp van een staartdeling.

c Welke herhaling van decimalen treedt hier op?

d Noem een voorbeeld van een decimaal getal waarin geen herhalend patroon van decimalen voorkomt.

Opgave 2

De exacte oplossing van de vergelijking $73x = 41$ is $x = \frac{41}{73}$. Deze oplossing als breuk is niet altijd handig. Met een decimaal getal is het vaak makkelijker werken.

a Schrijf $\frac{41}{73}$ als decimaal getal.

b Hoe groot is de twintigste decimaal van $\frac{41}{73}$?

c Welk cijfer staat er op de tweehonderdste plaats achter de komma?

Opgave 3

Je kunt getalverzamelingen beschrijven door uitdrukkingen met accolades. Bijvoorbeeld:

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\right\}$

Dit betekent dat $\mathbb{Q}$ de verzameling is van alle getallen van de vorm $\frac{p}{q}$, waarvan p en q gehele getallen zijn, maar q niet 0 is.

Beschrijf de volgende getalverzamelingen in woorden.

a $\{3n + 1 | n \in \mathbb{Z}\}$

b $\left\{\frac{1}{x} | x \in \mathbb{Q} \wedge x \neq 0\right\}$

Geef de volgende getalverzamelingen weer in de notatie met accolades.

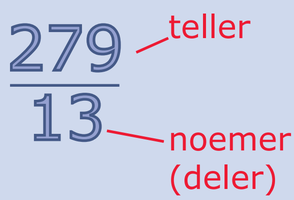
c De oneven positieve getallen.

d De kwadraten kleiner dan 1000.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De verzameling van de **rationale getallen** bevat alle getallen die te schrijven zijn als een deling van twee gehele getallen. Deze verzameling noem je $\mathbb{Q}$. 'Ratio' betekent 'verhouding'. $\mathbb{Q}$ bevat dus alle getallen die als $\frac{p}{q}$ geschreven kunnen worden en waarvoor geldt dat p en q gehele getallen zijn. Bovendien geldt: $q \neq 0$.



Figuur 2

Je schrijft: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\right\}$. Het teken | betekent 'waarvoor geldt'; het teken $\wedge$ betekent 'en'.

De gehele getallen zijn ook elementen van $\mathbb{Q}$. Immers elk geheel getal is te delen door 1 en dus ook een deling van twee hele getallen. Dit betekent dat $\mathbb{Z}$ een deel is van de verzameling $\mathbb{Q}$. Dat schrijf je als: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Het teken $\subset$ betekent 'is een deelverzameling van'. Ook geldt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Een eigenschap van de rationale getallen is dat de som, het verschil, het product en het quotiënt van twee rationale getallen altijd weer een rationaal getal is. Voor de gehele getallen geldt dit niet, bij delen krijg je immers niet altijd weer een geheel getal.

Een **rationaal getal omzetten naar een decimaal getal** doe je met een **staartdeling**. Er zijn dan twee mogelijkheden:

- De staart van de deling komt uiteindelijk op 0 uit. Het decimale getal heeft dan een eindig aantal decimalen.

  Bijvoorbeeld: $\frac{1}{5} = 0{,}2$ en $\frac{3}{8} = 0{,}375$
- De staart van de deling komt uiteindelijk niet op 0 uit. Het decimale getal heeft dan een oneindig aantal decimalen en er treedt altijd herhaling van decimalen op.

  Bijvoorbeeld: $\frac{1}{9} = 0{,}111111... = 0{,}\overline{1}$

  $\frac{6}{13} = 0{,}\overline{461538}$ en $\frac{207}{990} = 0{,}2090909... = 0{,}2\overline{09}$.

  De streep geeft aan wat het zich herhalende deel is.

Als de deling niet op 0 uitkomt, treedt altijd herhaling op bij delen door q. Dat is duidelijk als je bedenkt dat er niet meer dan q verschillende resten kunnen zijn bij de staartdeling.

De **reële getallen** ($\mathbb{R}$) zijn alle getallen die als decimaal getal te schrijven zijn. Dit zijn dus alle getallen die je je op een getallenlijn kunt voorstellen. Er geldt: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

De **irrationale getallen** zijn de getallen die niet in $\mathbb{Q}$ zitten, maar wel in $\mathbb{R}$. Het zijn de getallen die niet te schrijven zijn als deling van twee gehele getallen. Irrationaal zijn bijvoorbeeld de getallen $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$ en $\sqrt{\frac{1}{6}}$.

Voorbeeld 1

Kenmerkend voor de rationale getallen ongelijk aan 0 is dat de som, het verschil, het product en het quotiënt van twee rationale getallen altijd weer een rationaal getal is.
Toon dit aan.

Antwoord

Kies twee rationale getallen $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$ ($a \neq 0$ en $b \neq 0$, $c \neq 0$ en $d \neq 0$ en $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$).

Dan is:

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = a \cdot \frac{1}{b} \cdot c \cdot \frac{1}{d} = ac \cdot \frac{1}{bd} = \frac{ac}{bd}$
- $\frac{a}{b} / \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} / \frac{bc}{bd} = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{d}{c}\right) = \frac{ad}{bc}$

Je ziet dat je in alle gevallen opnieuw een rationaal getal krijgt. Immers de som, het verschil en het product van twee gehele getallen is weer een geheel getal.

Opgave 4

Zijn de volgende uitspraken waar of niet waar? Licht je antwoord toe.

a $7 \in \mathbb{Q}$

b $3{,}5 \in \mathbb{Q}$

c $-7 \in \mathbb{Q}$

d $2^n \in \mathbb{Q}$ als $n \in \mathbb{Z}$

e $\sqrt{7} \in \mathbb{Q}$

f $\sqrt{1\frac{9}{16}} \in \mathbb{Q}$

Opgave 5

In het voorbeeld zie je dat som, verschil, product en quotiënt van twee rationale getallen altijd rationaal zijn. Neem aan dat $a \in \mathbb{Z}$ en $b \in \mathbb{Z}$.

a Neem de rationale getallen $\frac{a}{3}$ en $\frac{5}{2b}$ en laat zien dat ook hun som, verschil, product en quotiënt rationaal zijn als $b \neq 0$.

b Neem de rationale getallen $\frac{3}{a}$ en $\frac{5}{2b}$ en laat zien dat ook hun som, verschil, product en quotiënt rationaal zijn als $a \neq 0$ en $b \neq 0$.

Voorbeeld 2

Schrijf $\frac{2}{7}$ als decimaal getal.

Antwoord

Voer de deling 2/7 uit:
2/7 = 0,2857142...
$\underline{0}$
2,0
$\underline{1{,}4}$
0,60
$\underline{0{,}56}$
0,040
$\underline{0{,}035}$
0,0050
$\underline{0{,}0049}$
0,00010
$\underline{0{,}00007}$
0,000030
$\underline{0{,}000028}$
0,0000020
$\underline{0{,}0000014}$
0,0000006

Er treedt herhaling op, dus $\frac{2}{7} = 0{,}\overline{285714}$.

Opmerking: de nullen maken de uitwerking onoverzichtelijk, je laat ze meestal weg.
Bedenk dan wel welke decimaal de uitwerking betreft.

Opgave 6

Schrijf de volgende breuken als decimaal getal. Doe dit zonder rekenmachine door middel van een staartdeling.

a $\frac{3}{5}$

b $\frac{1}{11}$

c $\frac{12}{23}$

Voorbeeld 3

Schrijf $6{,}5\overline{1234}$ als deling van twee gehele getallen.

Antwoord

Stel $a = 6{,}5\overline{1234} = 6{,}51234123412341234...$
Dan is $10a = 65{,}1234123412341234...$ en $100000a = 651234{,}123412341234...$

Dus is $100000a - 10a = 651234{,}1234... - 65{,}1234... = 651169$
Ofwel $99990a = 651169$

En $a = \frac{651169}{99990}$

Conclusie: $6{,}5\overline{1234} = \frac{651169}{9999}$

Opgave 7

In het voorbeeld zie je hoe een getal met repeterende decimalen als breuk kan worden geschreven.
Schrijf de volgende decimale getallen in de vorm $\frac{p}{q}$ met $p \in \mathbb{Z}$ en $q \in \mathbb{Z}$.

a $0{,}\overline{123}$

b $2{,}1\overline{7}$

c $-0{,}1\overline{53}$

Verwerken

Opgave 8

Schrijf som, verschil, product en quotiënt van a en $\frac{2b}{3c}$ als één rationaal getal als $c \neq 0$.

Opgave 9

Schrijf de volgende breuken als decimaal getal zonder het gebruik van de rekenmachine.

a $\frac{3}{80}$

b $\frac{2}{3}$

c $\frac{2}{15}$

Opgave 10

Schrijf $\frac{11}{43}$ als exact decimaal getal. Uit hoeveel cijfers bestaat het zich herhalende deel?

Opgave 11

Beschrijf in de verzamelingsnotatie (met accolades): de kwadraten van gehele getallen waarvan het kwadraat groter dan 800 is.

Opgave 12

Schrijf het getal $2{,}91\overline{523}$ in de vorm $\frac{p}{q}$ met $p \in \mathbb{Z}$ en $q \in \mathbb{Z}$ en $q \neq 0$.

Opgave 13

Welke van de volgende getallen zijn rationaal?

a $2,\overline{16}$

b $\sqrt{1,6}$

c $\sqrt{0,16}$

d $\sqrt{0,\overline{1}}$

Toepassen

Opgave 14: Rode en gele karpers

In een vijver zwemmen rode en gele karpers. Twee vijfde van de karpers is geel, de rest is rood. Driekwart van de gele karpers is een vrouwtje. In totaal zijn er even veel vrouwtjeskarpers als mannetjeskarpers.
Welk gedeelte van de totale karperpopulatie bestaat uit rode mannetjeskarpers?

Opgave 15: Puzzel je een breuk

p,q en r zijn positieve gehele getallen zo, dat $p+\frac{1}{q+\frac{1}{r}}=\frac{25}{19}$.

Hoe groot is hun product?

Testen

Opgave 16

Schrijf som, verschil, product en quotiënt van $\frac{1}{x}$ en $\frac{2}{x^2}$ als $\frac{t}{n}$ als x geheel is, $x \neq 0$ en t en n geheel zijn. vereenvoudig zo ver mogelijk.

Opgave 17

Schrijf de volgende breuken als decimaal getal. Doe dit handmatig, dus zonder rekenmachine.

a $\frac{7}{90}$

b $\frac{5}{70}$

Opgave 18

Schrijf het getal $3,\overline{1415}$ in de vorm $\frac{p}{q}$ met $p \in \mathbb{N}$ en $q \in \mathbb{N}$.

Opgave 19

Welke van de volgende getallen zijn rationaal?

a $-2,\overline{312}$

b $\sqrt{20\frac{1}{4}}$

c $\sqrt{15}$

d $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$