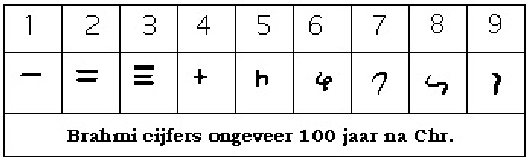
1.1 Gehele getallen

Inleiding



Figuur 1

In de Oudheid was een getal een hoeveelheid, samengesteld uit eenheden. Deze definitie is terug te vinden in 'De Elementen', het beroemde wiskundeboek van Euclides (ca. 300 v.Chr.). Ons getal 1 werd toen niet als getal gezien en 0 was nog helemaal niet in beeld. Het getal 0 ontstond pas toen het tientallig stelsel als 'positiestelsel' * zijn intrede deed in de Oud-Indische cultuur. De eerste cijfers ontstonden in die tijd, evenals het eerste idee van negatieve getallen.
De getallen 0, 1, 2, 3, 4, ... worden tegenwoordig de natuurlijke getallen genoemd. Voeg je daar de negatieve getallen aan toe, dan spreek je van de gehele getallen. Veel getallentheorie gaat alleen over natuurlijke getallen.

*Een **positiestelsel** is een talstelsel waarin een getal door een rij symbolen wordt voorgesteld. Dit zijn meestal cijfers, waarvan de positie op basis van een gekozen grondtal de bijdrage aan het getal bepaalt. Ons gebruikelijke talstelsel heeft 10 als grondtal. De positie van een cijfer bepaalt de bijdrage in machten van het grondtal 10 aan het getal. In dit stelsel heeft een getal als 1234 dan de betekenis: $1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0$.

In het tegengestelde van het positiestelsel bestaan er verschillende tekens voor kleine en grote waarden. Romeinse cijfers zijn het bekendste voorbeeld. De ervaring heeft geleerd dat het positiestelsel in alle opzichten handiger is.

Je leert in dit onderwerp

- de natuurlijke en de gehele getallen onderscheiden;
- werken met even en oneven getallen en priemgetallen;
- een paar eigenschappen van deze getallen.

Voorkennis

- rekenen met getallen in het tientallig stelsel.

Verkennen

Opgave V1

Het gaat in dit onderwerp over soorten getallen.
In deze opgave beperk je je tot de natuurlijke getallen: 0, 1, 2, 3, 4, ...
Zoek eens uit wat er wordt verstaan onder de volgende soorten getallen en schrijf de eerste getallen van die soort op.

- even getallen
- oneven getallen
- vijfvouden
- priemgetallen
- perfecte getallen
- bevriende getallen
- gebrekkige getallen en overvloedige getallen
- pythagoreïsche drietallen

Uitleg

Het idee van getallen is ontstaan uit het tellen en uit aantallen. Daarom waren de eerste getallen niet erg groot, bijvoorbeeld 2, 3, 4, 5, ..., 10, 20, ..., 100, 200, 300, ... Bij duizenden hield het wel op. De grote getallen, negatieve getallen en breuken zijn pas later ontstaan.

Er waren in de Oudheid allerlei manieren om getallen op te schrijven. Vaak werden voor tientallen andere symbolen gebruikt dan voor eenheden. Denk hierbij aan de Romeinse cijfers.

Ons huidige stelsel lijkt te zijn ontstaan in het oude China en is via Indië en Arabië omstreeks 1200 na Christus naar West-Europa gekomen. Het bestaat uit tien cijfers waarmee alle getallen gevormd kunnen worden. De 0 is nodig om een 'lege' positie aan te geven: 1024 is opgebouwd uit 1 duizendtal, 0 honderdtallen, 2 tientallen en 4 eenheden.

Al in de Oudheid werden de soorten getallen benoemd en bestudeerd, onder andere:

- natuurlijke getallen, de gehele positieve getallen;
- even getallen, die in twee gelijke hele delen kunnen worden verdeeld;
- oneven getallen, die niet in twee gelijke hele delen kunnen worden verdeeld;
- priemgetallen, de natuurlijke getallen groter dan 1 die alleen deelbaar zijn door 1 en door zichzelf.

Het vinden van bewijzen voor de eigenschappen van getallen is de grote uitdaging.

Opgave 1

De meest bijzondere gehele getallen zijn de priemgetallen. Priemgetallen zijn de gehele positieve getallen groter dan 1 die alleen door 1 en door zichzelf deelbaar zijn.

a Schrijf de eerste vijftien priemgetallen op.

b Hoe kun je nagaan of een getal een priemgetal is?

Opgave 2

Een even getal g kun je altijd schrijven in de vorm $g = 2n$, met $n = 0,1,2,3,...$

a Waarom is dat zo?

b In welke vorm kun je een drievoud schrijven?

c In welke vorm kun je een zesvoud schrijven? Laat zien, dat elk zesvoud ook een even getal is.

d In welke vorm kun je een oneven getal altijd schrijven?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **positiestelsel** is een getallenstelsel waarbij de waarde van een cijfer afhangt van de positie van dat cijfer in een getal. Ons **decimale getallenstelsel** is een positiestelsel met grondtal 10. Een **verzameling** is een groep wiskundige elementen. Elementen hebben meestal een of meer dezelfde eigenschappen. Een verzameling heeft vaak een naam (symbool).

De **natuurlijke getallen** zijn de getallen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... De elementen van deze verzameling hebben de eigenschappen dat ze een getal zijn, geheel zijn en 0 of groter zijn. Deze verzameling heeft als symbool $\mathbb{N}$. Je schrijft: $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,6,...\}$. Het aantal elementen van deze verzameling is 'oneindig'.

De **gehele getallen** zijn de natuurlijke getallen waaraan je de verzameling tegengestelde getallen $\{-1,-2,-3\},...$ toevoegt. Deze verzameling heeft als symbool $\mathbb{Z}$. Je schrijft: $\mathbb{Z} = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$.
Het symbool $\in$ betekent 'is een element van'.
Dat -4 tot de verzameling van de gehele getallen behoort, noteer je zo: $-4 \in \mathbb{Z}$. -4 is geen natuurlijk getal. Dat schrijf je zo: $-4 \notin \mathbb{N}$.

De som van twee gehele getallen is weer een geheel getal. Hetzelfde geldt voor het verschil en het product van twee gehele getallen. Maar als je gehele getallen gaat delen, komt daar vaak geen geheel getal uit.

Een geheel getal heet **deelbaar** door een ander geheel getal als de deling weer een geheel getal oplevert. Naar deelbaarheid worden verschillende soorten gehele getallen onderscheiden. De meest gebruikte zijn:

- **even getallen**: getallen van de vorm $2z$ met $z \in \mathbb{Z}$. Deze getallen zijn dus deelbaar door 2;
- **oneven getallen**: getallen van de vorm $2z + 1$ met $z \in \mathbb{Z}$. Deze getallen zijn dus niet deelbaar door 2;
- **priemgetallen**: getallen die alleen deelbaar zijn door 1 en door zichzelf en groter zijn dan 1.

Elk positief geheel getal is te schrijven als een uniek product van priemgetallen. Dit is de **hoofdstelling van de rekenkunde**.

Voorbeeld 1

Laat zien dat de som en het verschil van twee oneven getallen altijd even zijn, maar dat het product van twee oneven getallen altijd oneven is.

Antwoord

Neem twee oneven getallen $a = 2n + 1$ en $b = 2m + 1$, waarbij n en m verschillende gehele getallen zijn.

Optellen:
$a + b = 2n + 1 + 2m + 1 = 2n + 2m + 2 = 2(n + m + 1)$
Dus $a + b$ is altijd deelbaar door 2 en daarom even.

Aftrekken:
$a – b = 2n + 1 – (2m + 1) = 2n – 2m = 2(n – m)$
Dus $a - b$ is altijd deelbaar door 2 en daarom even.

Vermenigvuldigen:
$a \cdot b = (2n + 1) \cdot (2m + 1) = 4mn + 2n + 2m + 1 = 2(2mn + n + m) + 1$
Dus $a \cdot b$ is altijd oneven.

Het bovenstaande geldt ook voor $m = n$.

Opgave 3

Leg uit of en waarom de volgende beweringen waar of niet waar zijn.

a $7 \in \mathbb{Z}$

b $\frac{7}{2} \in \mathbb{Z}$

c $-7 \notin \mathbb{N}$

d $2n \in \mathbb{N}$ als $n = 0,1,2,3,...$

Opgave 4

In Voorbeeld 1 zie je dat de som en het verschil van twee oneven getallen altijd even zijn, maar dat het product ervan altijd oneven is.

a Hoe zit dat met twee even getallen? Toon dit op dezelfde wijze aan als in het voorbeeld.

b Is de som van twee drievouden altijd weer een drievoud? En het verschil? En het product? En het quotiënt? Licht je antwoord toe zoals in het voorbeeld.

Voorbeeld 2

Laat zien dat het kwadraat van een even getal altijd even is en dat het kwadraat van een oneven getal altijd oneven is.

Antwoord

Even getal: $a = 2n$ met $n \in \mathbb{Z}$.

Kwadrateren: $a^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$.
Dus het kwadraat van een even getal is inderdaad deelbaar door 2.

Oneven getal: $b = 2n + 1$ met $n \in \mathbb{Z}$.

Kwadrateren: $b^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$.
Dus het kwadraat van een oneven getal is inderdaad oneven.

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** wordt aangetoond dat het kwadraat van een even getal altijd even is en dat het kwadraat van een oneven getal altijd oneven is.

a Is de derdemacht van een even getal altijd even? Licht toe op de manier in het voorbeeld.

b Is de derdemacht van een oneven getal altijd oneven? Licht toe op de manier in het voorbeeld.

c Toon aan dat voor elk even getal g en elke $a > 0$ geldt dat a^g een kwadraat is.

Opgave 6

Je bekijkt nu twee opeenvolgende natuurlijke getallen n en $n - 1$.

a Toon aan dat hun product een even getal is.

b Toon aan dat het verschil van hun kwadraten een oneven getal is.

Voorbeeld 3

Een **Pythagoreïsch tripel** is een drietal gehele getallen a, b, c dat voldoet aan de vergelijking $a^2 + b^2 = c^2$.
Bekende voorbeelden zijn de tripels 3,4,5 en 5,12,13.
Ze zijn te vinden door twee gehele getallen m en n te kiezen ($m > n$) en daar a,b en c in uit te drukken. Doe dat zo dat het grootste getal c is.

Kies voor a het getal $m^2 - n^2$, voor b het getal $2mn$ en voor c het getal $m^2 + n^2$.
Toon aan dat $a = m^2 - n^2$ en $b = 2mn$ en $c = m^2 + n^2$ getallen zijn die een Pythagoreïsch tripel vormen.

Antwoord

Je moet aantonen dat $a^2 + b^2 = c^2$ en dus dat $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$.

Links van het isgelijkteken:

$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 + n^4 - 2m^2n^2 + 4m^2n^2 = m^4 + n^4 + 2m^2n^2$

Rechts van het isgelijkteken:

$(m^2 + n^2)^2 = m^4 + n^4 + 2m^2n^2$
Beide uitdrukkingen zijn identiek. Je krijgt inderdaad een drietal getallen dat aan de vergelijking $a^2 + b^2 = c^2$ voldoet.
Krijg je zo ook echt alle Pythagoreïsche tripels? (Denk eens aan de veelvouden van een Pythagoreïsch tripel.)

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** kom je de Pythagoreïsche tripels tegen.

a Kies $m = 17$ en $n = 12$. Welk Pythagoreïsch tripel levert dat op? Controleer met de vergelijking uit het voorbeeld of het goed gaat.

b Welke getallen moet je voor m en n kiezen om het tripel 3,4,5 te krijgen?

c Welke getallen moet je voor m en n kiezen om het tripel 5,12,13 te krijgen?

d Welke getallen moet je voor m en n kiezen om het tripel 56,90,106 te krijgen?

Verwerken

Opgave 8

Als je een getal schrijft als een product van priemgetallen, dan is dit het ontbinden van een getal in priemfactoren. Je deelt het getal eerst zo vaak mogelijk door het kleinste priemgetal, dan zo vaak mogelijk door het op een na kleinste priemgetal, enzovoort.

a Ontbind 2520 in priemfactoren.

b Ontbind 2984800 in priemfactoren.

c Welke delers hebben deze twee getallen gemeenschappelijk?

d Wat is hun grootste gemeenschappelijke deler?

Opgave 9

De hoofdstelling van de rekenkunde houdt in dat elk positief geheel getal een uniek product van priemgetallen is. Die priemgetallen worden wel priemfactoren genoemd.

a Laat zien dat $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$.

b Schrijf 2009 als het product van priemgetallen.

c Schrijf 15360 als het product van priemgetallen.

d Leg uit dat elk natuurlijk getal te schrijven is als een product van priemfactoren.

Opgave 10

Bekijk de vijfvouden: $g = 5n$ en $h = 5m$ met $m,n \in \mathbb{Z}$.

a Toon aan dat de som van twee vijfvouden weer een vijfvoud is.

b Toon aan dat het product van twee vijfvouden weer een vijfvoud is.

c Toon aan dat het kwadraat van een vijfvoud weer een vijfvoud is.

d Toon aan dat het quotiënt van twee vijfvouden geen vijfvoud hoeft te zijn.

Opgave 11

Toon aan dat voor elk even getal g geldt dat $g^4 + g^3 + 2g^2$ deelbaar is door 16.

Opgave 12

Een ‘perfect getal’ is een getal waarvan de delers samen opgeteld gelijk zijn aan het getal zelf (het getal zelf doet niet mee).

a Laat zien dat 6 een perfect getal is.

b Laat zien dat 28 een perfect getal is.

c Er is een verband tussen perfecte getallen en een speciaal soort priemgetallen, de ‘mersennepriemgetallen’. Mersennepriemgetallen zijn priemgetallen van de vorm $2^n - 1$, waarbij n een priemgetal is. Er geldt: als $2^n - 1$ een priemgetal is, dan is $2^{n-1}(2^n - 1)$ een perfect getal. Bereken het volgende perfecte getal na 28 en toon aan dat het perfect is.

Toepassen

Opgave 13: De zeef van Eratosthenes

De zeef van Eratosthenes (bibliothecaris van Alexandrië vanaf ca. 240 v.Chr.) is een algoritme om priemgetallen te vinden. Deze methode is vooral efficiënt wanneer hij wordt gebruikt voor de kleinere priemgetallen.

Zoek uit hoe deze methode werkt en pas deze methode toe om de priemgetallen tussen 2 en 15 te vinden.

Opgave 14: Getallen met zeven verschillende cijfers

Je bekijkt alle getallen van 7 cijfers die je kunt maken met de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6 en 7. Je gebruikt alle cijfers één keer. Die getallen schrijf je in een rij van klein naar groot.
Je splitst vervolgens die rij getallen precies in het midden op.

Welk getal is het grootste getal van de eerste helft?

Testen

Opgave 15

Bekijk de zesvouden: $g = 6 \cdot n$.

a Toon aan dat de som van twee zesvouden een even getal is.

b Toon aan dat de som van twee zesvouden een zesvoud is.

c Toon aan dat het product van twee zesvouden een negenvoud is.

d Toon aan dat het quotiënt van twee zesvouden geen zesvoud hoeft te zijn.

Opgave 16

Laat zien dat voor elk geheel getal n geldt dat $n^3 - n$ deelbaar is door 3.

Opgave 17

Welke gemeenschappelijke delers hebben 11025 en 19305?

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.