4.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Krommen en oppervlakken** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

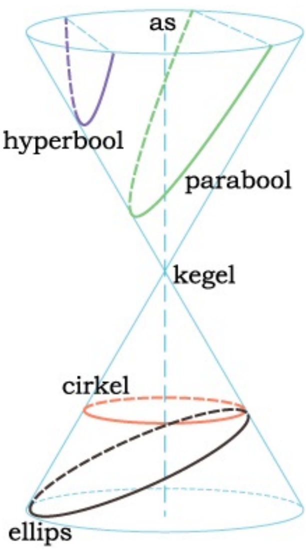
- cirkel, lijn — vergelijking — parametervoorstelling
- parabool — brandpunt, richtlijn — hyperbool, ellips — brandpunten, richtcirkel — vergelijkingen en parametervoorstellingen van krommen
- 3D krommen — schroeflijn
- oppervlakken — bol, cilinder
- kegel — kegelsnede

Activiteitenlijst

- vanuit vergelijkingen van lijnen en cirkels de karakteristieken bepalen — omzetten van vergelijkingen naar parametervoorstellingen v.v.
- werken met vergelijking en parametervoorstelling van parabool, ellips, hyperbool en andere krommen
- werken met parametervoorstelling van een kromme in 3D
- werken met parametervoorstelling en vergelijking van een bol en cilinder
- werken met parametervoorstelling en vergelijking van kegel — kegelsneden herkennen

Achtergronden

Apollonius van Perga (262 - 190 v.Chr.) was een Grieks wiskundige, die bekend stond als 'de grote geometer', de grote meetkundige. Vooral zijn boek 'Kegelsneden' waarin de begrippen parabool, hyperbool en ellips werden geïntroduceerd, is heel erg beroemd geworden. Hij beschreef er de cirkel, de ellips, de parabool en de hyperbool in als doorsnijdingen van een vlak met een (dubbele) kegel en leidde de belangrijkste eigenschappen van deze vlakke krommen af. Later paste hij deze kennis toe op de bewegingen van hemellichamen.
Dit geschrift bestond uit acht boeken, waarvan alleen de eerste vier in het Grieks en de eerste zeven in het Arabisch zijn blijven bestaan.
In de eerste vier boeken vormen een elementaire inleiding in de basiseigenschappen van de kegelsneden. Dit werk was meestal afkomstig van werk van Euklides, Aristeus en Menaechmus. Maar sommige delen zijn verder uitgewerkt. Het gaat daar over eigenschappen van raaklijnen, brandpunten, middellijnen en over de wijze van constructie van deze krommen.
De boeken V t/m VII zijn door Apollonius geheel zelf bedacht. In boek V gaat het over normalen (dat zijn loodlijnen op raaklijnen in het raakpunt) van kegelsneden getrokken vanuit bepaalde punten.



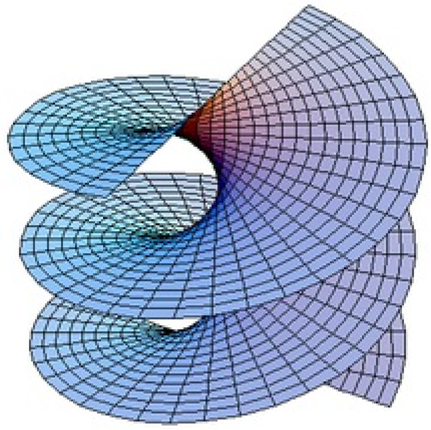
Figuur 1

Toepassen

Opgave 1: Regeloppervlakken

Oppervlakken die kunnen ontstaan door een rechte lijn in de ruimte te bewegen heten wel regeloppervlakken. Een regeloppervlak is een oppervlak, waarbij door elk punt van het oppervlak minstens één rechte - een beschrijvende of regel - gaat, die volledig tot het oppervlak behoort.

Voorbeelden zijn een cilinder, een kegel, een elliptische cilinder en de helicoïde die je hiernaast ziet (de parametervoorstelling ervan is $x = v\cos(au)$, $y = v\sin(au)$ en $z = u$.



Figuur 2

Een oppervlak E heeft parametervoorstelling $(x,y,z) = (2 + 4\cos(u), 4 + 2\cos(u), v)$.

a Om welke type regeloppervlak gaat het hier? Beschrijf het zo nauwkeurig mogelijk.

b Teken de doorsneden van het oppervlak E met de coördinaatvlakken.

c Geef een vergelijking van dit oppervlak.

Bekijk de helicoïde met $(x,y,z) = (v\cos(au), v\sin(au), u)$. Neem $a = 0{,}5$.

d Wat heeft deze figuur met een wenteltrap te maken?

e Welke rechte lijnen liggen er op?

f Laat zien dat er ook schroeflijnen op dit oppervlak liggen.

Opgave 2: Omwentelingsoppervlakken

Door een kegelsnede te wentelen om een as ontstaan omwentelingsoppervlakken zoals de ellipsoïde, de paraboloïde en de hyperboloïde. Maar je kunt ook andere krommen om een as wentelen.

- Een voorbeeld van een paraboloïde is het oppervlak met vergelijking $x^2 + z^2 = y$. Dit oppervlak ontstaat door de parabool met vergelijking $y = x^2$ om de y-as te wentelen.
- Een voorbeeld van een éénbladige hyperboloïde is het oppervlak met vergelijking $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

a Hoe zien de doorsneden van de paraboloïde met de vlakken $y = p$ (met $p > 0$) er uit?

b Hoe zien de doorsneden van de paraboloïde met de vlakken $z = p$ er uit?

c Geef een definitie van deze paraboloïde in termen van een brandpunt en een richtvlak.

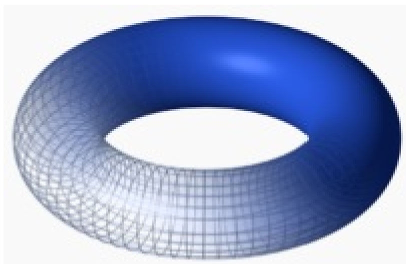
d Licht toe hoe de éénbladige hyperboloïde ontstaat.

Opgave 3: Torus en apenzadel

De **torus** is een buisachtig oppervlak, zeg maar de binnenband van een fietsband. Je ziet er hiernaast een voorbeeld van. Het oppervlak met vergelijking

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - 4\right)^2 + z^2 = 1$$

is een voorbeeld van een torus.



Figuur 3

a Teken de doorsneden van de torus met elk van de coördinaatvlakken.

b Welke waarden kan z aannemen? En x en y?

c Geef vergelijkingen van de doorsneden van de torus met de vlakken $x = 1$, $x = 2$ en $x = \sqrt{5}$ en schets deze doorsneden.

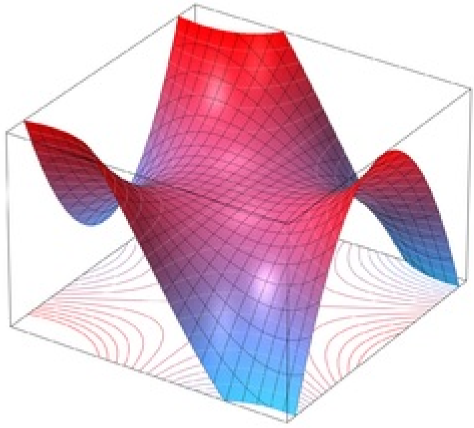
Hier zie je een oppervlak dat **apenzadel** wordt genoemd. Een voorbeeld van een apenzadel is een oppervlak met de vergelijking $z = x^3 - 3xy^2$.

d Waarom heet dit oppervlak zo, denk je?

e Teken de doorsneden van dit oppervlak met elk van de coördinaatvlakken.

f Welke punt is het ‘zadelpunt’?

g Je hebt ontdekt dat er op dit oppervlak rechte lijnen voorkomen. Eén daarvan is de doorsnede van het oppervlak met het vlak $x = 0$. Welke andere twee kun je uit de symmetrie van de figuur afleiden?



Figuur 4

Testen

Opgave 4

Hieronder zie je een aantal vergelijkingen of parametervoorstellingen van krommen en/of oppervlakken. Bepaal telkens om welke kromme en welk oppervlak het gaat en geef de karakteristieken ervan, zoals brandpunt(en), richtlijn(-cirkel), middelpunt, straal, top, symmetrieas, e.d.

a $x^2 + 4y^2 = 6x - 8y$

b $(x,y) = \left(2t, \frac{1}{4}t^2 + 4\right)$

c $x^2 - 6x = y^2 - z^2 + 4z - 13$

d $(x,y,z) = (2 + 2v, 3 + 4\cos(u), -5 + 4\sin(u))$

Opgave 5

Gegeven is ten opzichte van een rechthoekig Oxy-assenstelsel de cirkel c met middelpunt $O(0,0)$ en straal 5. Verder zijn gegeven de punten $A(4,0)$ en $B(7,0)$.
De kromme k bestaat uit alle punten met gelijke afstand tot punt A als tot cirkel c.

a Geef een vergelijking van k. Hoe heet zo'n kromme?

b Stel ook een parametervoorstelling voor k op.

c Bereken de coördinaten van de punten op k waarin de raaklijn aan k evenwijdig is met de lijn $y = x$.

d Stel vergelijkingen op van de raaklijnen door punt B aan kromme k.

Opgave 6

Gegeven zijn ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel Oxy de cirkel $c : x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0$ en de parabool $p : y^2 = -0{,}5x + 1{,}5$.

a Toon aan dat de top van de parabool en het middelpunt van de cirkel hetzelfde punt zijn.

b Bereken de coördinaten van het brandpunt en de vergelijking van de richtlijn van p.

c Bereken de hoek waaronder beide krommen elkaar snijden.

d Bereken de lengte van de kleinste cirkelboog die de parabool uit de cirkel wegsnijdt.

Opgave 7

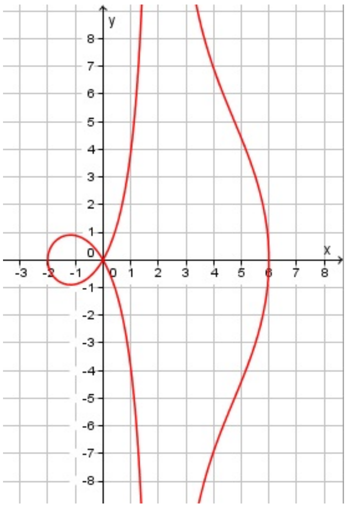
Een voorbeeld van een conchoïde is de kromme k die bestaat uit alle punten (x,y) die voldoen aan de vergelijking $\left(x^2+y^2\right)(x-2)^2 = 16x^2$.

a Welke waarden kunnen x en y aannemen?

b Bereken de coördinaten van snijpunten van k met de assen.

c Bereken de coördinaten van de punten van k waarin de raaklijn evenwijdig is met de y-as.

d Bereken de hoek waaronder beide raaklijnen aan k in $O(0,0)$ elkaar snijden.



Figuur 5

Opgave 8

Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel $Oxyz$ is de bol B gegeven door de parametervoorstelling

$(x,y,z) = (4+5\cos(u)\cos(v), 3+5\sin(u)\cos(v), 5\sin(v))$

waarin $0 \leq u < 2\pi$ en $-\frac{1}{2}\pi \leq v \leq \frac{1}{2}\pi$.

a Bepaal de coördinaten van het middelpunt M en de lengte r van de straal van bol B.

b Geef een vergelijking van B.

c Bereken de coördinaten van de snijpunten van bol B met de coördinaatassen.

d Het vlak $V: z = 2{,}5$ snijdt de bol volgens een cirkel c. Bereken de straal van c.

e Kegel K heeft M als top en snijdt de bol volgens cirkel c. Stel een vergelijking en een parametervoorstelling van deze kegel op.

f Bereken de hoek waaronder de bol en de kegel elkaar snijden in graden nauwkeurig.

g Rechte lijn l door $P(4,6,4)$ maakt een hoek van 60° met de bol en is evenwijdig met de vlak $x = y$. Stel een parametervoorstelling op van l.

Opgave 9

Gegeven is ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel $Oxyz$ een kegel met top T op de z-as en een grondcirkel die in het Oxy-vlak de vergelijking $x^2+y^2=36$ heeft. De tophoek van de kegel is 90°.
Op de y-as ligt punt $P(0,12,0)$ en op de x-as ligt het punt $A(6,0,0)$.
Het punt Q ligt op AT zo, dat de afstand van Q tot OT gelijk is aan 3.

a Teken deze kegel en punt P is het assenstelsel.

b Bepaal de coördinaten van punt Q.

c Bereken de afstand van lijn PQ tot lijn OT.

d Lijn PQ snijdt de kegel behalve in punt Q ook in punt R. Teken dit punt in je figuur en bereken de coördinaten van R.

e Bereken de hoek waaronder PQ de kegel snijdt in graden nauwkeurig.

Examen

Opgave 10: Scheve parabool

Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel $Oxyz$ is de kromme k gegeven door

$x = t^2 - t - 2$ en $y = t^2 + t + \frac{1}{4}$

waarbij $t \in \mathbb{R}$.

a Bereken de coördinaten van de gemeenschappelijke punten van k en de coördinaatassen.

b Bereken de coördinaten van de punten van k waarin de raaklijn aan k evenwijdig is aan de x-as of de y-as.

c Kromme k snijdt de y-as in twee punten A en B. Bereken de hoek die de raaklijnen in deze punten aan de kromme met elkaar maken in graden nauwkeurig.

d Er bestaat een waarde van p waarvoor de lijn $x + y = p$ precies één punt met de kromme k gemeen heeft. Bereken p.

e De kromme k is een parabool. Stel een vergelijking op van de symmetrieas van deze parabool.

(bron: examen vwo wiskunde B in 1988, eerste tijdvak, opgave 3, aangepast)

Opgave 11: Bol en cilinder

De kubus $OABC.DEFG$ is ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel $Oxyz$ gegeven door $A(6,0,0)$, $C(0,6,0)$ en $D(0,0,6)$.

De bol β gaat door B en F en raakt lijn OC in O.

a Stel een vergelijking op voor bol β.

Het midden van het lijnstuk AB is het middelpunt van een bol γ die door F gaat.

b Bereken de lengte van het lijnstuk dat γ van de lijn EG afsnijdt.

Een cilinder heeft als as lijn OA en straal 3.
Binnen het vierkant $ABFE$ ligt het punt R zo, dat

- de lijn CR deze cilinder raakt en bovendien
- de lijn CR een hoek van 30° maakt met de lijn BC.

c Bereken de coördinaten van R.

(bron: examen vwo wiskunde B in 1991, eerste tijdvak, opgave 4, aangepast)

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.