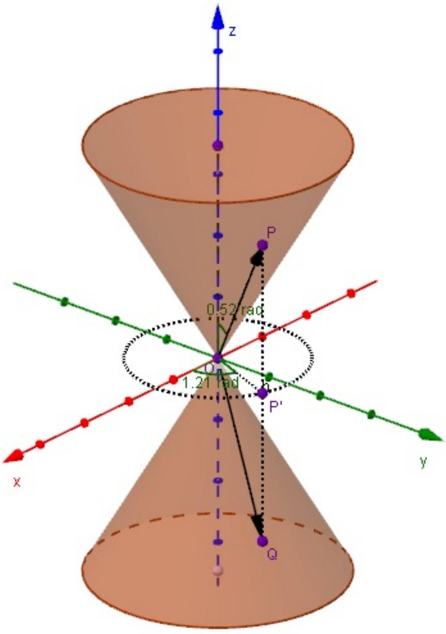
Inleiding

Een ander voorbeeld van een oppervlak is het kegeloppervlak. Je ziet er hier één.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- kegeloppervlakken in 3D beschrijven met parametervoorstellingen en vergelijkingen;
- kegelsneden herkennen.

Voorkennis

- werken met parametervoorstellingen en vergelijkingen van krommen en oppervlakken in 2D en 3D.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de kegel in de **Inleiding** met top $O(0,0,0)$.
Verder wordt de kegel bepaald door de constante hoek φ tussen de as (hier de z-as) en de lijn OP als het punt $P(x,y,z)$ over deze kegel beweegt. Neem aan dat die hoek $\varphi = 30° = \frac{1}{6}\pi \approx 0{,}52$ rad is.

a Hoe ver ligt P van de as af als $z = 3$?

b Hoe groot is de straal van de cirkel waar P op ligt voor een willekeurige waarde van z?

c Welke vergelijking in x, y en z levert dat op?

d Hoe ziet die vergelijking er uit als je de top verschuift?

Uitleg 1

Een kegeloppervlak bestaat uit alle punten P die een recht evenredig toenemende afstand hebben tot een vaste lijn a. a heet de as van de kegel en het punt waar de afstand tot de as 0 is heet de top. De afstand van P tot de as wordt bepaald door de halve tophoek φ, dat is de hoek tussen de as en de lijn TP.

Is $O(0,0,0)$ de top en de z-as de as van de kegel, dan ligt elk punt $P(x,y,z)$ op een cirkel met straal $r = z \cdot \tan(\varphi)$. En omdat $|OQ|^2 = x^2 + y^2 = r^2$ vind je

$x^2 + y^2 = z^2 \cdot \tan^2(\varphi)$

Dit is de vergelijking van een kegel(oppervlak) met de z-as als as, O als top en φ als halve tophoek.

Je kunt deze vergelijking eenvoudig aanpassen voor het geval de top $T(a,b,c)$ en de as evenwijdig met één van de coördinaatassen is. Ook een parametervoorstelling is mogelijk.

Opgave 1

Bekijk de **Inleiding**. Je ziet een kegel K met top $O(0,0,0)$, de z-as als symmetrieas en een halve tophoek $\varphi = \frac{1}{6}\pi$.

a Neem nu aan dat punt P op de kegel K een z-waarde van 5 heeft. Bereken dan de straal van de cirkel waar P op ligt.

b Bereken nu de y-coördinaat van P als de x-coördinaat 3 is.

c Voor een ander punt P geldt x = -3 en y = 2. Bereken de z-waarden die dit punt P kan hebben.

d Aan welke vergelijking moeten de punten $P(x,y,z)$ voldoen als P op de kegel ligt?

e Leid nu zelf de algemene vergelijking af van en kegel met top $O(0,0,0)$, de z-as als symmetrieas en een halve tophoek φ.

Opgave 2

Natuurlijk hoeft een kegel niet de z-as als as te hebben en de oorsprong als top.

a Stel een vergelijking op van een kegel met de x-as als symmetrieas, de oorsprong als top en een halve tophoek van $\frac{1}{4}\pi$.

b Laat zien, dat een 'kegel' met een halve tophoek van 0° een rechte lijn oplevert. Neem bijvoorbeeld de x-as als symmetrieas en de oorsprong als top.

c Welke waarden kan de halve tophoek aannemen?

d Stel een vergelijking op van een kegel met top $T(1,2,3)$, een as evenwijdig aan de y-as die door het punt (2,0,0) gaat.

Uitleg 2

Als je een kegel(oppervlak) K doorsnijdt met een vlak, dan krijg je een kegelsnede. Hier zie je de doorsnede met een vlak dat evenwijdig is aan de as van de kegel.
Zolang het punt B niet samenvalt met de top van de kegel wordt de doorsnede dan een hyperbool. Dat kun je vanuit de vergelijking $x^2+y^2 = z^2 \cdot \tan^2(\varphi)$ van de kegel gecombineerd met de vergelijking $x = c$ voor het vlak afleiden.

Door het vlak niet evenwijdig aan de as van de kegel te tekenen, kun je ook een parabool, een ellips of een cirkel maken.

Opgave 3

In **Uitleg 2** zie je een (deel van een) doorsnede van een vlak en een kegel, een kegelsnede.

a In de animatie lijkt de doorsnede een hyperbool. Is elke doorsnede evenwijdig aan de as een hyperbool?

b Stel je nu voor dat het vlak niet langer evenwijdig is aan de as. Wanneer is de doorsnede dan geen hyperbool, maar een parabool?

c Welke vormen kan de doorsnede van een vlak met een kegel allemaal aannemen? Beschrijf ook onder welke omstandigheden een bepaalde vorm optreedt.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **kegeloppervlak** bestaat uit alle punten P die een recht evenredig toenemende afstand hebben tot een vaste lijn a. a heet de **as** van de kegel en het punt waar de afstand tot de as 0 is heet de top. De afstand van P tot de as wordt bepaald door de **halve tophoek** $\boldsymbol{\varphi}$, dat is de hoek tussen de as en de lijn TP.

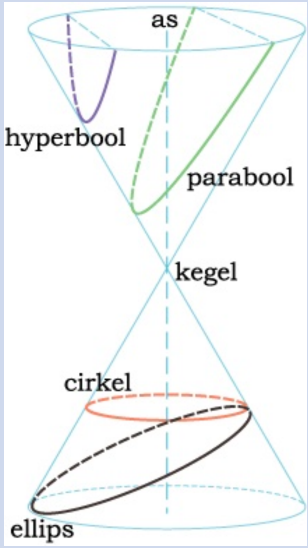
Een kegel(oppervlak) met top $T(a,b,c)$, de as evenwijdig aan de z-as en halve tophoek φ heeft als **vergelijking**:

$(x-a)^2+(y-b)^2=(z-c)^2\cdot\tan^2(\varphi)$.

Deze vergelijking moet je aanpassen voor situaties waarin de as van de cilinder evenwijdig is met één van de andere coördinaatassen. Een **parametervoorstelling** van een kegel(oppervlak) maak je vanuit een draaihoek u en een verschuiving v. Zie **Voorbeeld 2**.

Een **kegelsnede** is de doorsnede van een kegel(oppervlak) met een vlak dat niet door de top van de kegel gaat. Is dit vlak evenwijdig aan de as van de kegel, dan is de kegelsnede een hyperbool. Door het vlak een steeds grotere hoek met de as te laten maken krijg je:

- een hyperbool zolang die hoek kleiner is dan φ;
- een parabool als die hoek gelijk is aan φ;
- een ellips als die hoek groter is dan φ maar kleiner dan 90°;
- een cirkel als die hoek gelijk is aan 90°.



Figuur 2

Voorbeeld 1

Stel een vergelijking op van het raakvlak aan de kegel K met vergelijking $x^2+y^2-z^2=4x+6z+5$ in het punt $P(5,4,2)$.

Antwoord

Bepaal eerst door kwadraat afsplitsen de top en de as van de kegel K.

De vergelijking wordt: $(x-2)^2+y^2=(z+3)^2$.
Het top van de kegel wordt $T(2,0,\text{-}3)$ en de as van de kegel is evenwijdig met de z-as.

Vervolgens ga je na, dat $P(5,4,2)$ op het kegeloppervlak ligt.

De normaalvector van het raakvlak is nu een vector die loodrecht staat op de vector $\overrightarrow{TP}$ en ligt in het vlak door P en de as van de kegel.

De vector $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\4\\\text{-}5\end{pmatrix}$ is zo'n vector.

Dus het raakvlak heeft vergelijking $3x+4y-5z=21$.

Opgave 4

Je kunt aan kegels ook raaklijnen en raakvlakken maken. In **Voorbeeld 1** zie je hoe je de vergelijking van een raakvlak aan een kegel opstelt in een punt op de kegel.

a Waarom wordt in het voorbeeld eerst de vergelijking van de kegel zo geschreven dat je de top, de as en de halve tophoek kunt bepalen? Doe dit zelf ook.

b Ga zelf na, dat $P(5,4,2)$ inderdaad op de kegel ligt.

c Bepaal zelf de normaalvector van het raakvlak en stel de vergelijking ervan op.

Voorbeeld 2

Gegeven is de kegel $x^2 + y^2 = 0{,}25z^2$.
Stel hierbij een parametervoorstelling op.

Antwoord

De parametervoorstelling van een kegel lijkt veel op de parametervoorstelling van een cirkel. Je werkt met een draaihoek u net als bij de cirkel en je gebruikt een verschuiving v.

Bij deze kegel kies je als draaihoek (in radialen) de hoek u die lijnstuk OP' met de positieve x-as maakt.

De verschuiving v is de vector $\overrightarrow{P'P}$ die een hoek φ met de z-as maakt, waarvoor geldt $\tan^2(\varphi) = 0{,}25$, dus $\tan(\varphi) = 0{,}5$.
Je kunt nu de coördinaten van elk punt P op de kegel beschrijven door:
$x = 0{,}5v\cos(u),\ y = 0{,}5v\sin(u)$ en $z = v$.

De parametervoorstelling van de kegel is
$(x,y,z) = (0{,}5v\cos(u); 0{,}5v\sin(u); v)$.
Hierbij is $0 \leq u \leq 2\pi$ en kan v alle waarden aannemen.

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** wordt een parametervoorstelling van een kegel met een gegeven vergelijking opgesteld.

a Hoe groot is de halve tophoek φ? Geef je antwoord in graden nauwkeurig.

b Licht toe, dat $\left|\overrightarrow{OQ}\right| = \frac{1}{2}v\sqrt{2}$.

c Leid nu zelf de parametervoorstelling van de kegel af.

d Laat zien, dat de gevonden parametervoorstelling ook aan de gegeven vergelijking voldoet.

e Geef een parametervoorstelling van de kegel $x^2 + y^2 = z^2\tan^2(\varphi)$.

Opgave 6

Stel een vergelijking en een parametervoorstelling op van de kegel K die hieronder wordt beschreven.

a K heeft y-as als as, top $T(0,-2{,}0)$ en gaat door $P(3{,}4{,}5)$.

b K heeft de lijn a door $A(2{,}4{,}0)$ en $B(2{,}4{,}6)$ als as en een halve tophoek van $\varphi = \frac{1}{4}\pi$.

c K heeft de lijn a door $A(2{,}4{,}0)$ en $B(2{,}4{,}6)$ als as en raakt het vlak $x + y + z = 6$.

Voorbeeld 3

De kegel K met vergelijking $x^2 + y^2 = 0{,}25z^2$ wordt gesneden door het vlak V met vergelijking $x = 3$. Toon aan dat de kegelsnede die hierdoor ontstaat een hyperbool is.

Antwoord

De punten van de doorsnede van K en V moet aan beide vergelijkingen voldoen.
Daarom geldt voor die punten $3^2 + y^2 = 0{,}25z^2$.

Dit kun je schrijven als $\frac{z2}{36} - \frac{y2}{9} = 1$.

En dat is de vergelijking van een hyperbool in een Oyz-assenstelsel waarvan de z-as de symmetrieas is.

Opgave 7

In de **Theorie** zie je welke krommen als kegelsnede kunnen voorkomen.
In **Voorbeeld 3** wordt aangetoond dat de doorsnede van de kegel $x^2 + y^2 = 0{,}25z^2$ en het vlak $x = 3$ een hyperbool is.

a Loop het voorbeeld na.

b Neem nu in plaats van het vlak $x = 3$ het vlak met vergelijking $x + z = 3$. Toon aan dat de bijbehorende kegelsnede nu een ellips is.

c Levert de doorsnede van elk vlak met vergelijking $x + z = p$ en de kegel een ellips op? Waarom?

Wil de kegelsnede een parabool zijn, dan moet het vlak waarmee de kegel wordt doorsneden een even grote hoek met de as van de kegel maken als de halve tophoek.

d Laat zien, dat dit geldt voor het vlak $2x + z = 6$.

e Toon aan dat de bij d horende kegelsnede inderdaad een parabool is.

Verwerken

Opgave 8

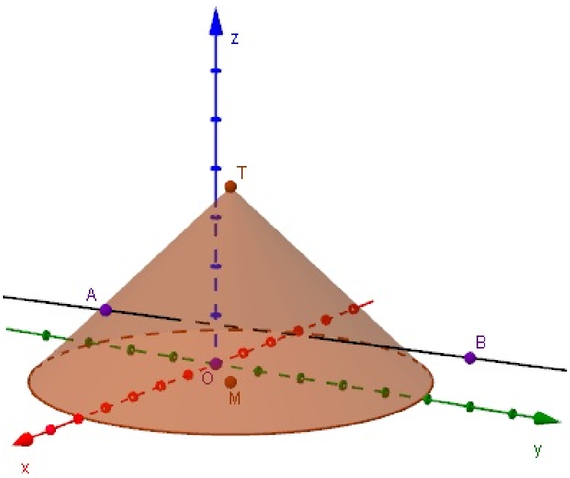
Bepaal de top, de as en de halve tophoek van de kegel waarvan deze vergelijking of parametervoorstelling is gegeven.

a $x^2 + z^2 = 0{,}5y^2 - 4x + 4y - 4z$

b $(x, y, z) = (v, 2v\cos(u) + 3, 2v\sin(u) + 4)$

Opgave 9

In de ruimtemeetkunde bestaat een kegel vaak niet uit twee delen met de top T in de midden, maar slechts uit één gedeelte waarvan de top dan ook echt het hoogste punt is. Verder loopt zo'n kegel meestal niet oneindig door, maar heeft hij een bepaalde hoogte en een grondcirkel.
Hier zie je zo'n kegel. De tophoek is $T(1,1,4)$, het middelpunt van de grondcirkel is $M(1,1,0)$ en de straal van de grondcirkel is 4. Verder zijn gegeven de punten $A(4,0,2)$ en $B(0,6,1)$.



Figuur 3

a Stel een vergelijking op voor deze kegel. Geef de begrenzing aan door te vermelden welke waarden z mag aannemen.

b Stel een parametervoorstelling op van de lijn l door A en B en onderzoek of l de kegel snijdt.

c Laat zien, dat de doorsnede van deze kegel met het vlak $y = 0$ een tak van een hyperbool is.

Opgave 10

Gegeven is in een rechthoekig $Oxyz$-assenstelsel de kegel K door de vergelijking $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

a Bereken de tophoek van deze kegel.

b Stel een parametervoorstelling op voor K.

c Toon aan dat het vlak $y = z$ de kegel raakt.

d Stel een vergelijking op van het raakvlak aan deze kegel dat door het punt $P(3,4,5)$ gaat.

e Het vlak met vergelijking $z = x + 2$ snijdt deze kegel volgens een kromme k. Welke vorm heeft deze kromme? Beschrijf hem met passende vergelijkingen.

Opgave 11

Gegeven zijn de bol B en de kegel K door de vergelijkingen

$B: (x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 16$

en $K: (x-4)^2 - (y-4)^2 + (z-4)^2 = 0$

a Teken de loodrechte projecties van deze twee oppervlakken op elk van de drie coördinaatvlakken.

De hoek waaronder twee oppervlakken elkaar in een bepaald punt snijden is de hoek tussen de raakvlakken aan deze oppervlakken in dat punt.

b Onder welke hoek snijden beide oppervlakken elkaar?

Opgave 12

De uitslag van een meetkundige kegel is een deel van een cirkel. Je knipt daartoe de kegelmantel open langs een rechte lijn vanuit de top naar de grondcirkel. In sommige gevallen is die uitslag precies een halve cirkel.

a Hoe groot is in dat geval de halve tophoek van de kegel?

b Neem aan dat de halve cirkel een booglengte van 10π heeft. Hoe hoog is dan de kegel?

c Deze kegel wordt in een rechthoekig $Oxyz$-assenstelsel geplaatst met de grondcirkel in het xy-vlak en de z-as als as. Stel een vergelijking en een parametervoorstelling van de kegel op.

d Er zijn twee vlakken die de kegel raken in de punten op de grondcirkel met $x = 4$. Welke hoek maken deze vlakken met elkaar?

Testen

Opgave 13

Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel $Oxyz$ heeft kegel K als top het punt $T(5,5,10)$ en als as een lijn a door T en evenwijdig aan de z-as. De kegel gaat verder door het punt $(5,0,0)$.

a Stel een vergelijking en een parametervoorstelling van deze kegel op.

b Stel vergelijkingen op van de beide raakvlakken door $O(0,0,0)$ aan K.

c Stel een vergelijking op van de bol B die door de top van de kegel gaat en de doorsnijdingscirkel met het xy-vlak met de kegel gemeen heeft.

d Het vlak V door $(0,0,10)$, $(5,5,0)$ en $(0,5,0)$ snijdt van de bol een cirkel af. Bereken de straal van die cirkel.

e De doorsnede van V en de kegel K is een kegelsnede. Onderzoek welke vorm deze kegelsnede heeft.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.