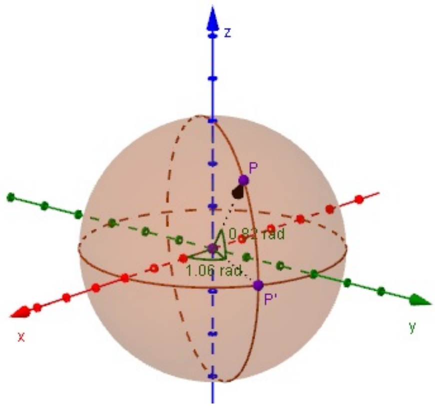
4.4 Bollen en cilinders

Inleiding

Nu ga je oppervlakken in 3D bekijken.
Bijvoorbeeld deze bol. Bij het boloppervlak kun je weer met parametervoorstellingen en vergelijkingen werken.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- oppervlakken in 3D beschrijven met parametervoorstellingen en vergelijkingen;
- snijpunten en raakvlakken berekenen.

Voorkennis

- werken met parametervoorstellingen in 2D en 3D en vergelijkingen van krommen in 2D;
- snijpunten met de assen en raaklijnen aan krommen berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de bol in de **Inleiding**. Je ziet een bol met middelpunt $O(0,0,0)$ en straal 3.
Stel je voor dat het punt $P(x,y,z)$ over deze bol beweegt.

a Hoe ver ligt P altijd van O af?

b Welke vergelijking in x, y en z levert dat op?

c Hoe ziet die vergelijking er uit als je het middelpunt verschuift?

Uitleg 1

Een boloppervlak bestaat uit alle punten P die een vaste afstand r hebben tot een vast punt M. r heet de straal en M het middelpunt van de bol.

Is $O(0,0,0)$ het middelpunt van de bol dan geldt voor elk punt $P(x,y,z)$ dat $r = |OP|^2 = |OQ|^2 + |QP|^2$.

En omdat $|OQ|^2 = x^2 + y^2$ en $|QP| = z$ vind je
$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.
Dit is de vergelijking van een bol(oppervlak) met middelpunt O en straal r.

Je kunt deze vergelijking (net als bij een cirkel) eenvoudig aanpassen voor het geval het middelpunt $M(a,b,c)$ is. Het maken van een parametervoorstelling is wat lastiger. Net als bij de vectorvoorstelling van een plat vlak heb je twee parameters nodig.

Ook het cilinderoppervlak heeft een vergelijking en een parametervoorstelling.

Opgave 1

Bekijk de **Inleiding**. Je ziet een bol B met middelpunt $O(0,0,0)$ en straal 3.

a Welke van de volgende punten liggen op het boloppervlak, welke liggen er binnen en welke erbuiten?
$A(2,2,1)$, $B(0,0,\text{-}3)$, $C(\text{-}2,1,\text{-}2)$, $D(2;2{,}5;\text{-}1)$, $E\left(\sqrt{8},0,1\right)$, $F(\text{-}1{,}5;1{,}5;1{,}5)$

b Bepaal a zo, dat $G(a,a,a)$ op het boloppervlak ligt.

c Voor welke waarden van a ligt G binnen de bol?

d Aan welke vergelijking moeten de punten $P(x,y,z)$ voldoen als P op de bol ligt?

e Beschrijf de kromme die de doorsnede voorstelt van de bol met het vlak $z = 0$. Doe hetzelfde voor $z = 1$, $z = 2$ en $z = 3$.

f Beschrijf ook de doorsnede van de bol met het vlak $y + z = 0$.

Uitleg 2

Een cilinderoppervlak bestaat uit alle punten P die een vaste afstand r hebben tot een vaste lijn a. r heet de straal en a de as van de cilinder.

Is de z-as de as van de cilinder dan geldt voor elk punt $P(x,y,z)$ dat $r^2 = |OQ|^2 = x^2 + y^2$ en daarom geldt voor elke P:
$x^2 + y^2 = r^2$
Dit is de vergelijking van een cilinder(oppervlak) met als as de z-as en straal r.

Je kunt deze vergelijking (net als bij een cirkel) eenvoudig aanpassen voor het geval de as evenwijdig aan de z-as en door het punt $M(a,b,c)$ gaat. En ook voor het geval de as evenwijdig loopt met één van de andere coördinaatassen.
Het maken van een parametervoorstelling gaat vrij gemakkelijk. Net als bij de vectorvoorstelling van een plat vlak heb je twee parameters nodig.

Opgave 2

De doorsnede van de bol B met het xy-vlak is een cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 9$.

a Teken die cirkel in een rechthoekig $Oxyz$-assenstelsel.

b Teken ook alle punten in het vlak $z = 1$ waarvoor geldt $x^2 + y^2 = 9$.

c Doe hetzelfde voor de vlakken $z = 2$, $z = 3$, $z = 5$ en $z = -5$.

d Teken de cilinder waar al deze cirkels op liggen. Aan welke vergelijking voldoet elk punt op deze cilinder?

De cilinder die je zojuist hebt getekend heeft de z-as als symmetrieas en straal 3.

e Welke vergelijking heeft een cilinder waarvan de x-as de symmetrieas is en de straal 4 is?

Theorie en voorbeelden

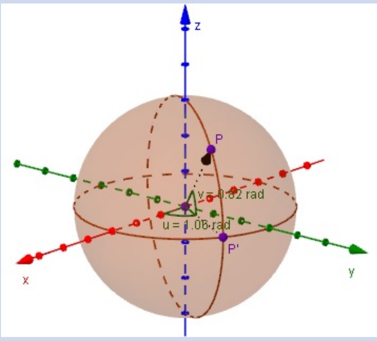
Om te onthouden

Een **boloppervlak** bestaat uit alle punten P die een vaste afstand r hebben tot een vast punt M. r heet de **straal** en M het **middelpunt** van de bol.

Een bol(oppervlak) met middelpunt $M(a,b,c)$ en straal r heeft als **vergelijking**:

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$.

Een **parametervoorstelling** van een bol(oppervlak) maak je vanuit twee draaihoeken u en v en met behulp van sinus en cosinus.

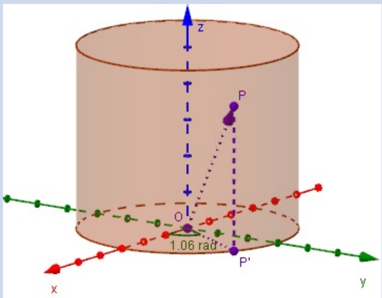


Figuur 2

Een **cilinderoppervlak** bestaat uit alle punten P die een vaste afstand r hebben tot een vaste lijn a. r heet de **straal** en a de **as** van de cilinder.

De **vergelijking** van een cilinder(oppervlak) met een as door $M(a,b,c)$ en evenwijdig de z-as en straal r is: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Deze vergelijking moet je aanpassen voor situaties waarin de as van de cilinder evenwijdig is met één van de andere coördinaatassen. Een **parametervoorstelling** van een cilinderoppervlak maak je vanuit één draaihoek u en een verschuiving v. Zie **Voorbeeld 2**.



Figuur 3

Voorbeeld 1

Stel een vergelijking op van het raakvlak V aan de bol B met vergelijking $x^2+y^2+z^2=4x+6z+16$ in het punt $P(4,3,7)$.

Antwoord

Bepaal eerst door kwadraat afsplitsen het middelpunt van de bol B.

De vergelijking wordt: $(x-2)^2+y^2+(z-3)^2=29$.
Het middelpunt van de bol wordt $M(2,0,3)$.

Vervolgens ga je na, dat $P(4,3,7)$ op het boloppervlak ligt.

De straal $\overrightarrow{MP}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ staat loodrecht op het raakvlak V en is dus normaalvector van dit vlak.

Verder ligt het punt $(4,3,7)$ in V.

De vergelijking van V is: $2x+3y+4z=45$.

Opgave 3

In de **Theorie** zie je hoe je de bol en de cilinder kunt beschrijven met behulp van een vergelijking.

a Bepaal nu het middelpunt en de straal van de bol met vergelijking $(x-1)^2+(y-4)^2+z^2=25$.

b Stel een vergelijking op van de bol met middelpunt $M(-2,1,2)$ die door het punt $A(-1,-1,-3)$ gaat.

c Stel een vergelijking op van de cilinder door $O(0,0,0)$ waarvan de as evenwijdig is aan de y-as en door $P(1,0,3)$ gaat.

Opgave 4

Je kunt aan bollen en cilinders ook raaklijnen en raakvlakken maken. In **Voorbeeld 1** zie je hoe je de vergelijking van een raakvlak aan een bol opstelt in een punt op de bol.

a Waarom wordt in het voorbeeld eerst de vergelijking van de bol zo geschreven dat je het middelpunt kunt bepalen? Doe dit zelf ook.

b Ga na, hoe nu de vergelijking van het raakvlak wordt opgesteld.

Neem vervolgens het oppervlak C met vergelijking $x^2 + y^2 = 8x + 13$.

c Toon aan dat dit oppervlak een cilinder is en bereken de straal van die cilinder. Beschrijf ook de as van de cilinder.

d Stel de vergelijking op van het raakvlak W aan C in het punt $Q(2,5,3)$.

e Welke vergelijking heeft het raakvlak aan C dat evenwijdig is met W?

f Voor welke waarden van a raakt de lijn $l : (x,y,z) = (at,2+t,4-t)$ de cilinder C?

Voorbeeld 2

Gegeven is de cilinder $x^2 + y^2 = 9$.
Stel hierbij een parametervoorstelling op.

Antwoord

De parametervoorstelling van een cilinder lijkt veel op de parametervoorstelling van een cirkel. Je werkt met een draaihoek u net als bij de cirkel en je gebruikt een verschuiving v.

Bij deze cilinder kies je als draaihoek (in radialen) de hoek u die OP' met de positieve x-as maakt.

De verschuiving v is de vector $\overrightarrow{P'P}$.
Je kunt nu de coördinaten van elk punt P op de cilinder beschrijven door:
$x = 3\cos(u)$, $y = 3\sin(u)$ en $z = v$.

De parametervoorstelling van deze cilinder is dus $(x,y,z) = (3\cos(u),3\sin(u),v)$.
Hierbij is $0 \leq u \leq 2\pi$ en kan v alle waarden aannemen.

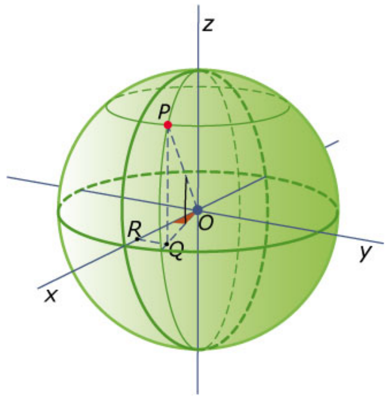
Opgave 5

In **Voorbeeld 2** wordt een parametervoorstelling van een cilinder opgesteld.

a Laat zien, dat $x = 3\cos(u)$, $y = 3\sin(u)$ en $z = v$ voldoen aan de gegeven vergelijking van de cilinder.

b Welke kromme ontstaat er als je $v = u$ neemt?

Je kunt ook voor een bol een parametervoorstelling maken. Daarvoor kunnen als parameters de hoeken $u = \angle ROQ$ en $v = \angle QOP$ worden gebruikt. Hierin is QR loodrecht op de x-as en PQ loodrecht op het xy-vlak. De bol heeft middelpunt O en straal r.



Figuur 4

c Welke waarden moeten u en v aannemen om een complete bol te beschrijven?

d Laat zien, dat $x = r\cos(u)\cos(v)$, $y = r\sin(u)\cos(v)$ en $z = r\sin(v)$.

e Toon aan dat de bij b gevonden uitdrukkingen voor x, y en r voldoen aan de bolvergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Opgave 6

Stel een vergelijking en een parametervoorstelling op van het oppervlak V dat hieronder wordt beschreven.

a V is een cilinder met de y-as als as die door $P(3,4,5)$ gaat.

b V is een bol met middelpunt O die het vlak $x + y + z = 6$ raakt.

c V is een cilinder met een as door $(4,4,0)$ die zowel het xz-vlak als het yz-vlak raakt.

d V is een bol door de punten $A(2,0,0)$, $B(2,2,0)$, $C(2,2,2)$ en $D(0,2,2)$.

Voorbeeld 3

Een oppervlak wordt ten opzichte van een rechthoekig $Oxyz$-assenstelsel beschreven door $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$.
Leg uit waarom dit oppervlak wel een ellipsoïde wordt genoemd.

Antwoord

Om deze vraag te kunnen beantwoorden heb je een voorstelling van het oppervlak nodig. Aanzichten helpen daarbij.

Recht van boven gezien (vanuit de z-richting) zie je de tweedimensionale kromme:
$4x^2 + y^2 = 16$.
Dit kun je schrijven als $\frac{x2}{4} + \frac{y2}{16} = 1$.
En deze kromme is een ellips door de punten $(2,0,0)$, $(0,4,0)$, $(-2,0,0)$ en $(0,-4,0)$.
Ga dat na...

En zo kun je het oppervlak ook vanuit de x-richting en de y-richting bekijken.
Je ontdekt dat het oppervlak kan ontstaan door de ellips in het xy-vlak te wentelen om de y-as. En daarmee verklaar je de naam ‘ellipsoïde’ als omwentelingsellips.

Opgave 7

Het oppervlak waarvan je in **Voorbeeld 3** een vergelijking ziet heet een ellipsoïde.

a Teken in een rechthoekig $Oxyz$-assenstelsel de drie doorsneden van dit oppervlak met de coördinaatvlakken.

b Leg uit waarom het oppervlak kan worden gezien als een ellips die om de y-as wordt gewenteld.

c Bewijs de symmetrie van deze ellipsoïde t.o.v. de y-as.

Ook van zo'n ellipsoïde kun je een parametervoorstelling maken.

d Kies twee geschikte parameters en geef een bijpassende parametervoorstelling.

e Stel een vergelijking op van de ellipsoïde met centrum O die door $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$ en $C(0,0,6)$ gaat en waarvan de x-as, de y-as en de z-as symmetrieassen zijn. Maak er ook een parametervoorstelling bij.

Verwerken

Opgave 8

Bepaal middelpunt en straal van de bol of symmetrieas en straal van de cilinder als deze vergelijkingen of parametervoorstellingen zijn gegeven.

a $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x + 4y - 8z + 5 = 0$

b $(x,y,z) = (v + 2{,}2\cos(u) + 3{,}2\sin(u) + 4)$

c $x^2 + y^2 = 12x$

d $(x,y,z) = (5 + 5\cos(u)\cos(v)\,,5 + 5\sin(u)\cos(v)\,,5\sin(v))$

Opgave 9

Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel $Oxyz$ is de kubus $OABC.DEFG$ gegeven door $A(4{,}0{,}0)$, $C(0{,}4{,}0)$ en $D(0{,}0{,}4)$. Verder is bol B_1 gegeven door de vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

a Teken de kubus en het gedeelte van de bol B_1 in het assenstelsel.

b Bol B_2 met middelpunt G raakt B_1. Stel een vergelijking van B_2 op.

c Stel een vergelijking op van bol B_3 waarvan AG de middellijn is.

Een cilinder C met straal 3 heeft de lijn BF als as.

d Stel een vergelijking van C op.

e Bereken de (kortste) afstand van bol B_1 tot cilinder C.

f Er bestaan twee vlakken V_1 en V_2 die zowel B_1 als C raken, evenwijdig zijn met de z-as en tussen de bol en de cilinder in liggen. Met één van die twee vlakken heeft B_1 het punt P gemeen en C de lijn l. Bereken de afstand van P tot l.

Opgave 10

Een viervlak $O.ABC$ is ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel $Oxyz$ gegeven door $A(6{,}0{,}0)$, $B(0{,}6{,}0)$ en $C(0{,}0{,}6)$.

a Stel een vergelijking op van de omgeschreven bol van dit viervlak, dus van de bol die door alle hoekpunten ervan gaat.

b Stel een vergelijking op van de ingeschreven bol van dit viervlak, dus van de bol die alle vlakken van dit viervlak raakt.

Opgave 11

Gegeven is de bol B door de parametervoorstelling
$(x,y,z) = (4 + 3\cos(v)\cos(u), 3 + 3\cos(v)\sin(u), 2 + 3\sin(v))$ met $0 \leq u \leq 2\pi$ en $-0{,}5\pi \leq v \leq 0{,}5\pi$.

a Stel een vergelijking op van deze bol.

b De doorsnede van het vlak $z = 4$ met deze bol is een cirkel. Welke straal heeft deze cirkel? En welke waarde van v hoort er bij?

c Welke vergelijking heeft de cilinder C die B raakt volgens de cirkel waarvoor geldt $v = 0$?

d Welke vergelijking heeft het vlak dat zowel de bol als de cilinder raakt en waarvoor geldt $u = 0{,}25\pi$?

e De lijn l met parametervoorstelling $(x,y,z) = (2{,}1{,}3) + t(4{,}4{,}0)$ snijdt de bol B in twee punten P en Q. Onder welke hoek snijdt l de bol?

Opgave 12

Een cilinder wordt gesneden door twee vlakken V en W die beide loodrecht op de as l van de cilinder staan. De afstand tussen V en W is 2 cm. Op de snijcirkel van de cilinder en vlak V ligt een punt A. Op de snijcirkel van de cilinder en vlak W ligt een punt B. $|AB| = 4$ cm en de afstand van lijn AB tot l is 1 cm.

a Bereken de straal van de cilinder.

b Bereken de hoek die beide raakvlakken in A en B aan de cilinder met elkaar maken.

Testen

Opgave 13

Bepaal middelpunt en straal van de bol of symmetrieas en straal van de cilinder als deze vergelijkingen of parametervoorstellingen zijn gegeven.

a $x^2 + z^2 - 4x + 4z = 0$

b $(x,y,z) = (2\sin(v), 2\cos(u)\cos(v), 2\sin(u)\cos(v) + 4)$

c $x^2 + y^2 + z^2 = 10y - 6z - 39$

d $(x,y,z) = (5 + 5\cos(u), 5 + 5\sin(u), 5v)$

Opgave 14

Van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ is $A(0,0,4)$, $B(4,0,0)$, $C(0,0,-4)$, $D(-4,0,0)$ en $T(0,0,8)$.

a Stel een vergelijking op van de bol door de hoekpunten van deze piramide.

b Bereken de hoeken waaronder de lijn AT deze bol snijdt in graden nauwkeurig.

c Een cilinder waarvan lijn OT de symmetrieas is raakt alle vier de zijden van grondvlak $ABCD$ van de piramide. Stel van deze cilinder een vergelijking op.

d De cilinder bedoeld in c snijdt ribbe BT in punt P. Bereken $|OP|$.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.