4.3 3D Krommen

Inleiding

Mooie krommen? Denk maar eens aan achtbanen, zoals deze... Je beschrijft ze met parametervoorstellingen in 3D, dus met zowel x als y (in het grondvlak) als z (in de hoogte) als functie van de tijd t.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- krommen in 3D beschrijven met parametervoorstellingen;
- werken met snelheidsvectoren;
- de snelheid waarmee een punt een kromme doorloopt berekenen.

Voorkennis

- werken met parametervoorstellingen en vergelijkingen van krommen in 2D;
- werken met vectorvoorstellingen in 3D;
- snijpunten berekenen en evenwijdigheid in 3D.

Verkennen

Opgave V1

Een kromme wordt beschreven door
$x(t) = 8\cos(t)$, $y(t) = 8\sin(t)$ en $z(t) = 10 + 8\sin(2t)$ met $0 \leq t \leq 2\pi$.
Het Oxy-vlak is het grondvlak, z is de hoogte boven dit grondvlak. Wat stel je je hierbij voor kromme voor?
Stel je voor dat het punt P over deze kromme loopt.

a Hoe ziet de beweging van P er uit als je loodrecht op het Oxy-vlak kijkt?

b Hoe ziet de beweging van P er ruimtelijk uit? (Probeer een schets te maken.)

Figuur 2

Uitleg

Met $P(x(t), y(t))$ beschrijf je hoe de coördinaten van een punt in een Oxy-vlak veranderen met de tijd t. Je krijgt dan een kromme in twee dimensies, x en y.

Is het Oxy-vlak als grondvlak op te vatten en kun je tegelijkertijd het punt omhoog en/of omlaag bewegen, dan heb je behalve $x(t)$ en $y(t)$ ook een functie $z(t)$ nodig. Die laatste functie legt dan vast hoe hoog het punt boven het Oxy-vlak zit. Je krijgt nu een kromme in drie dimensies.

Hier zie je een voorbeeld van zo'n 3D-kromme: als de cirkel gelijkmatig omhoog beweegt en tegelijk de rode punt op de cirkel langzaam draait om de verticale as, ontstaat (een stukje van) een Archimedische schroeflijn.

Er geldt: $(x,y,z) = \left(3\cos(t), 3\sin(t), \frac{3}{2\pi}t\right)$.

Wanneer je de 3D-kromme recht van boven (in de z-richting) bekijkt zie je de 2D-kromme $(x,y) = (3\cos(t), 3\sin(t))$, een cirkel.
Bekijk je de 3D-kromme precies vanuit de y-richting, zie je $(x,z) = (3\cos(t), 3\sin(t))$, een sinusoïde om de z-as.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Bekijk minstens één winding van een (Archimedische) schroeflijn.

a Maak om te beginnen een tabel met waarden voor x, y en z als $t = 0, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \pi, ..., 2\pi$.

b Teken vervolgens een ruimtelijk xyz-assenstelsel met de punten uit je tabel er in. Probeer nu zelf de schroeflijn te tekenen.

c Bekijk van boven (dus langs de z-as naar beneden) op de schroeflijn. Wat zie je?

d Kijk je van boven, dan speelt de z-waarde geen rol. Laat zien dat de kromme dan een cirkel is en stel een vergelijking van die cirkel op.

e Kijk nu langs de y-as naar de kromme. Wat zie je?

f Bij kijken langs de y-as speelt de y-waarde geen rol. Nu is x een functie van z. Welke functievoorschrift hoort daar bij?

g Beschrijf zo ook met een formule de kromme die je zit als je langs de x-as kijkt.

Opgave 2

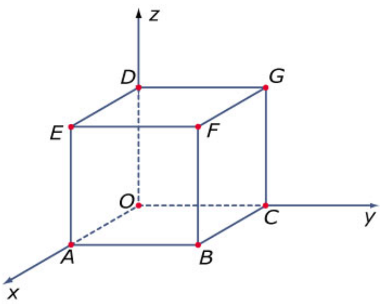
Bekijk de schroeflijn uit de voorgaande opgave nog eens.

a Hoe kun je het snijpunt van deze kromme met het vlak $z = 2$ berekenen?

b Bereken de snijpunten van de schroeflijn met het vlak $x = y$. Waarom zijn het er oneindig veel?

Opgave 3

Een rechte lijn l heeft vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Figuur 3

a Welke parametervoorstelling heeft deze lijn?.

b Teken l in een assenstelsel met een kubus met ribben van 6 (zie figuur hiernaast).

c In welke punten snijdt l de kubus?

Stel je voor dat de beweging van punt P in het assenstelsel beschreven wordt door deze rechte lijn. t is de tijd in seconden.

d Welke waarden kan t aannemen voor de punten P die binnen de kubus liggen?

e Hoe lang is het gedeelte van l dat binnen de kubus ligt?

f Hoe lang bevindt P zich binnen de kubus? Met welke snelheid beweegt P?

Opgave 4

Een punt P beweegt met een constante snelheid en richting in een driedimensionaal rechthoekig $Oxyz$-assenstelsel. Op $t = 0$ bevindt P zich in (7,0,4) en op $t = 1$ in (7,1,3).

a Waar zit P op $t = 10$? En op $t = -2$?

b Geef een parametervoorstelling van de baan van P.

c Hoe groot is de snelheid waarmee P beweegt?

d Welke vector is de snelheidsvector van P? Wat is het verschil tussen de snelheid en de snelheidsvector?

e Laat zien dat de snelheidsvector $\vec{v} = (x'(t), y'(t), z'(t))$ is.

Een ander punt Q doorloopt de baan beschreven door $(x,y,z) = (9+t, 6+2t, 6+2t)$.

f Botsen deze punten op elkaar?

g Hebben de banen van deze punten een snijpunt?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

$(x,y,z) = (x(t), y(t), z(t))$ is een **plaatsvector** in een Oxy-assenstelsel die afhangt van de 'tijd' t. Het punt dat door deze plaatsvector wordt aangewezen beschrijft een **driedimensionale kromme** K. (Hier is een Archimedische schroeflijn te zien als de rode punt over de cirkel beweegt.)

De bijbehorende **snelheidsvector** is

$\vec{v} = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

De **snelheid** is de lengte van deze snelheidsvector:

$|v| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$

De achterliggende theorie is onderdeel van het wiskunde B programma.

Bekijk je deze kromme vanuit de richting van één der assen, dan krijg je als aanzicht een **tweedimensionale kromme**. En daarin spelen behalve t alleen de twee variabelen een rol die zijn uitgezet op de assen loodrecht op de kijkrichting.

Voorbeeld 1

Als je de cirkel rustig omhoog beweegt tot het middelpunt (0,0,3) is, zie je één winding van een Archimedische schroeflijn ontstaan. De bijbehorende parametervoorstelling is:

$(x,y,z) = \left(3\cos(t), 3\sin(t), \frac{3}{2\pi}t\right)$.

De spoed van de schroeflijn is de afstand tussen twee windingen gemeten in de richting van de as van de cilinder waar hij op ligt.
Hoe lang is elke omwenteling en hoe groot is de spoed van deze schroeflijn?

Antwoord

De schroeflijn ligt op een cilinder met straal 3.
Tussen $t = 0$ en $t = 2\pi$ zit één omwenteling.
Bij $t = 0$ hoort het punt (3,0,0).
Bij $t = 2\pi$ hoort het punt (3,0,3).
Bekijk je één omwenteling dan is die te tekenen als diagonaal van een opengeklapte cilindermantel.
Zo'n cilindermantel is een rechthoek van $2\pi \cdot 3$ bij 3. De lengte van de diagonaal is $(6\pi)^2 + 3^2 \approx 19{,}1$.

Het verschil in 'hoogte' tussen beginpunt en eindpunt van deze omwenteling is 3 (eenheden). Dit is de spoed van de schroeflijn.

Opgave 5

In de **Theorie** zie je hoe een kromme (of een rechte) in de ruimte kan worden beschreven met een parametervoorstelling.

a Waarom kan dit in het algemeen niet met een vergelijking in x, y en z?

b Leg uit hoe je aan de parametervoorstelling ziet dat de figuur die je in de applet kunt construeren een schroeflijn is.

c In **Voorbeeld 1** wordt de lengte van deze schroeflijn berekend. Voer deze berekening zelf uit.

In dit voorbeeld wordt ook verteld wat de spoed van een schroeflijn is.

d Hoe ziet de parametervoorstelling er uit van een schroeflijn met dezelfde spoed die ligt op een cilinder om de z-as met straal 2?

e Hoe ziet de parametervoorstelling er uit van een schroeflijn met een twee keer zo grote spoed die ligt op een cilinder om de z-as met straal 2?

f Hoe ziet de parametervoorstelling er uit van een schroeflijn met spoed 2π die ligt op een cilinder om de x-as met straal 2?

Voorbeeld 2

Als je de cirkel rustig omhoog beweegt tot het middelpunt (0,0,3) is, zie je één winding van een Archimedische schroeflijn ontstaan. De bijbehorende parametervoorstelling is:

$(x,y,z) = \left(3\cos(t), 3\sin(t), \frac{3}{2\pi}t\right)$.

Laat zien dat deze schroeflijn met een constante snelheid wordt doorlopen.

Antwoord

De snelheidsvector is:

$\vec{v} = \left(-3\sin(t), 3\cos(t), \frac{3}{2\pi}\right)$.

De snelheid zelf is $|v| = \sqrt{(-3\sin(t))^2 + (3\cos(t))^2 + \left(\frac{3}{2\pi}\right)^2} =$

$= \sqrt{9 + \left(\frac{3}{2\pi}\right)^2}$.

Dit is een constant getal.

Het komt overeen met de in **Voorbeeld 1** gevonden lengte van elke omwenteling. Als je weet dat de snelheid constant is kun je die namelijk ook berekenen door de lengte van elke omwenteling te delen door de omwentelingstijd 2π.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** gaat het over de snelheid waarmee een punt op een schroeflijn beweegt.

a Waarom beweegt een punt over deze schroeflijn altijd met een constante snelheid?

b Is ook de snelheidsvector constant? Waarom?

c Bekijk de gegeven parametervoorstelling. Hoe moet je deze parametervoorstelling aanpassen om het punt twee keer zo snel te laten bewegen?

d Met behulp van de snelheidsvector kun je een parametervoorstelling van de raaklijn in een punt van de schroeflijn bepalen. Stel een parametervoorstelling van de raaklijn aan de schroeflijn op in het punt A waarvoor geldt $x = 0{,}5\pi$.

e Welke hoek maakt deze raaklijn met de y-as?

f Deze raaklijn snijdt het xy-vlak. In welk punt en onder welke hoek?

Opgave 7

Ten opzichte van een rechthoekig $Oxyz$-assenstelsel beweegt een punt P over de kromme k met parametervoorstelling $(x,y,z) = \left(t, t+2, \sqrt{(t)}\right)$. Hierin is t de tijd in seconden.

a Op welk tijdstip zit P op de y-as? In welk punt?

b Bereken op welk tijdstip P in het vlak $z = 9$ zit.

c Teken een bovenaanzicht van kromme k. (Je kijkt dan langs de z-as naar beneden.)

d Teken een vooraanzicht van kromme k. (Je kijkt dan langs de x-as naar achteren.)

e Stel de snelheidsvector van k op.

f Met welke snelheid beweegt P als dit punt door het vlak $z = 9$ gaat?

g Onder welke hoek gaat P door het vlak $z = 9$?

h Op welk tijdstip zit P het dichtst bij O? Hoe groot is de afstand van P tot O dan?

Voorbeeld 3

Een kromme wordt beschreven door
$x(t) = 8\sin(t)$, $y(t) = 8\sin(2t)$ en $z(t) = 10 + 8\sin(2t)$ met $0 \leq t \leq 2\pi$.
Het Oxy-vlak is het grondvlak, z is de hoogte boven dit grondvlak.
Leg uit waarom deze kromme een soort van achtbaan voorstelt.

Antwoord

Recht van boven gezien (vanuit de z-richting) zie je de tweedimensionale kromme:
$(x(t), y(t)) = (8\sin(t), 8\sin(2t))$.
Dit is voor t op $[0,2\pi]$ een Lissajousfiguur in de vorm van een liggende acht. Deze kromme doorloop je in het Oxy-vlak.

In de z-richting doorloop je tegelijkertijd twee keer een sinusoïde met amplitude 8 en evenwichtsstand $z = 10$.
Is dat een achtbaan of niet...?

Opgave 8

De kromme waarvan je in **Voorbeeld 3** een parametervoorstelling ziet is een soort achtbaan.

- **a** Welke waarden kunnen x, y en z aannemen?
- **b** Welke parametervoorstelling heeft de projectie van deze kromme op de xy-vlak (het bovenaanzicht dus)?
- **c** Teken (in GeoGebra?) de kromme die bij deze projectie hoort.
- **d** Laat zien dat de projectie een 8 is die symmetrisch is t.o.v. de oorsprong van het assenstelsel.
- **e** Licht nu toe waarom hier sprake is van een achtbaan.
- **f** Bereken hoogste punten van deze achtbaan en bereken de snelheid in die punten.
- **g** Bereken in deze hoogste punten ook de hoek die de baan op dat moment met het horizontale xy-vlak maakt.
- **h** Op welke momenten bereikt een punt dat deze achtbaan doorloopt zijn hoogste snelheid?
- **i** Bereken de totale lengte van de achtbaan.

Verwerken

Opgave 9

Gegeven zijn de krommen $k_1 : (x,y,z) = (t + 1, 2t, t + 3)$ en $k_2 : (x,y,z) = \left(s, s, s^2\right)$.

- **a** Leg uit waarom k_1 een rechte lijn is.
- **b** Bereken de kortste afstand van k_1 tot de oorsprong O van het assenstelsel.
- **c** Bereken de hoek waaronder beide krommen elkaar snijden.
- **d** Heeft k_2 een raaklijn evenwijdig aan het yz-vlak? En aan het xy-vlak?
- **e** Teken de kubus $OABC.DEFG$ met $A(6,0,0)$. Teken in die kubus de delen van k_1 en k_2 die erbinnen liggen.
- **f** k_2 heeft twee punten met de kubus gemeen. Bereken de coördinaten van die twee punten.
- **g** Hoe lang is het gedeelte van k_1 dat binnen de kubus ligt?

Opgave 10

De schroeflijn s is gegeven door de parametervoorstelling $(x,y,z) = (2t, 4\sin(t), 4\cos(t))$ met $t \geq 0$.

- **a** Welk punt is het beginpunt van deze kromme?
- **b** Welke waarden kunnen x, y en z aannemen?
- **c** Waaraan kun je zien dat deze kromme op een cilinder ligt? Welke as heeft die cilinder?
- **d** Hoe lang is elke omwenteling van de schroeflijn?

e Welke hoek maakt de schroeflijn met het vlak $x = 4$?

f Welke snelheid heeft een punt P dat over deze schroeflijn beweegt op het moment dat $x = 4$?

Opgave 11

Gegeven is ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel $Oxyz$ de kromme k door $(x,y,z) = \left(2t, t^2 - t, e^t\right)$.

a Bereken de snijpunten van k met de coördinaatvlakken.

b Bereken de punten van k waarin de raaklijn evenwijdig is met één der coördinaatvlakken.

c Bereken de hoek waaronder k de z-as snijdt.

Opgave 12

Twee punten bewegen in een driedimensionaal $Oxyz$-assenstelsel. P_1 beweegt volgens een rechte lijn en met een constante snelheid. Op $t = 0$ bevindt het zich in $(0,0,6)$ en op $t = 1$ in $(2,4,6)$.
De baan van P_2 wordt beschreven door $(x,y,z) = \left(2t, 4t, t^2 - 0{,}25\right)$.
ook hierin is t de tijd en $t \geq 0$.

a Bereken het punt waarop beide punten tegen elkaar botsen.

b Hoe groot is de snelheid van P_1 bij de botsing?

c En hoe groot is de snelheid van P_2 op dat moment?

d Onder welke hoek botsen de punten op elkaar?

Toepassen

Opgave 13: De konische schroeflijn

Een voorbeeld van een konische schroeflijn is de kromme k gegeven door $(x,y,z) = ((4\pi - t)\sin(t), (4\pi - t)\cos(t), 2t))$ met $0 \leq t \leq 4\pi$. Een punt P beweegt over deze kromme, waarbij t de tijd in seconden voorstelt.

a Bereken het snijpunt van k met de z-as.

b Bereken de coördinaten van de snijpunten van k met het yz-vlak en teken de projectie van k op dat vlak (een vooraanzicht dus).

c Teken ook (met GeoGebra?) de projectie van k op het xy-vlak.

d R is de afstand van P tot de oorsprong van het assenstelsel. Stel een zo eenvoudig mogelijke formule voor R op.

e Stel een formule op voor de snelheid v van P als functie van t. Met welke snelheid begint P aan zijn beweging?

f Op welke tijdstippen is v maximaal of minimaal?

g Onder welke hoek met de z-as nadert P het eindpunt van zijn baan?

h Hoe lang is deze konische schroeflijn?

Testen

Opgave 14

Gegeven is de schroeflijn s door de parametervoorstelling $(x,y,z) = (2 + 2\cos(t), 2 + 2\sin(t), t)$ met $0 \leq t \leq 2\pi$.

a Maak een schets van deze schroeflijn in de kubus $OABC.DEFG$ waarvan $A(4,0,0)$ en $D(0,0,4)$ is.

b Bereken de snijpunten van s met deze kubus.

c Hoe lang is het deel van de schroeflijn dat binnen de kubus ligt?

d Onderzoek of er een punt op de schroeflijn is waarin de raaklijn evenwijdig is met lijn OF.

Opgave 15

De punten P en Q bewegen in een rechthoekig $Oxyz$-assenstelsel.
Voor P geldt: $(x,y,z) = \left(t, 2t, 0{,}25t^2\right)$.
Voor Q geldt: $(x,y,z) = (t, 6+t, 3+t)$.
Hierin is t de tijd in seconden. Beide punten starten op $t = 0$ maar op verschillende plaatsen. Na verloop van tijd botsen ze op elkaar.

a Welk van deze punten beweegt niet met een constante snelheid? Bereken van dit punt de beginsnelheid.

b Welke hoek maken hun banen op $t = 0$ met elkaar?

c Botsen de punten op elkaar? Zo ja, na hoeveel seconden is dat?

d Met welke snelheden botsen de punten op elkaar?

e Hoe ver ligt het punt waarop P en Q op elkaar botsen van de oorsprong af?

f Hoeveel bedraagt de grootste afstand tussen beide punten?

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.