3.7 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Vectoren in 3D** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- 3D cartesisch assenstelsel — coördinaten en vectoren in 3D
- inproduct van vectoren — hoek tussen vectoren — hoek tussen lijnen
- plaatsvector — richtingsvector — vectorvoorstelling van een lijn — afstand van een punt tot een lijn
- vectorvoorstelling van een vlak — uitproduct van vectoren — normaalvector en vergelijking van een vlak
- snijdende, evenwijdige en kruisende lijnen — snijdende en evenwijdige vlakken
- hoek tussen lijn en vlak — hoek tussen twee vlakken — afstand tussen twee lijnen — afstand van een punt tot een vlak

Activiteitenlijst

- werken met coördinaten en vectoren in 3D — werken met kentallen — afstand tussen twee punten, lengte van een vector berekenen
- inproduct van vectoren berekenen — hoek tussen vectoren berekenen
- vectorvoorstellingen van lijnen opstellen — hoeken tussen lijnen berekenen — afstand van een punt tot een lijn berekenen
- vectorvoorstellingen en vergelijkingen van vlakken in 3D opstellen
- onderzoeken of lijnen evenwijdig zijn, elkaar snijden, elkaar kruisen — snijpunt van twee lijnen en van lijn met vlak berekenen — onderzoeken of twee vlakken evenwijdig zijn of elkaar snijden — snijlijn van twee vlakken bepalen
- hoeken en afstanden berekenen

Achtergronden

Sir William Rowan Hamilton (1805—1865) was een Ierse wiskundige, natuurkundige en astronoom die belangrijke bijdragen leverde aan de ontwikkeling van de optica, dynamica en algebra.

Hamilton was de eerste die het begrip **vector** introduceerde.
Hij werkte vooral in drie dimensies en voor hem was een vector een pijl vanuit de oorsprong van een driedimensionaal assenstelsel naar een punt in de ruimte.

Hamilton werd in het bijzonder bekend door de door hem bedachte **quaternionen**, een uitbreiding van de complexe getallen.

Figuur 1

Testen

Opgave 1

Een driezijdige piramide $T.ABC$ is gegeven door $A(0,-3,0)$, $B(4,-3,0)$, $C(0,3,0)$ en $T(0,0,3)$.

a Toon aan dat de vlakken ABT en ACT loodrecht op elkaar staan.

b Bereken de afstand tussen de lijnen BT en AC.

c Bereken in graden nauwkeurig de hoek die vlak BCT maakt met lijn AB.

Opgave 2

Gegeven is de regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ door $T(0,0,6)$, $A(3,3,0)$, $B(-3,3,0)$, $C(-3,-3,0)$ en $D(3,-3,0)$.
Verder zijn gegeven de punten $E(-3,9,0)$ en $F(1,-1,4)$.

a Teken deze piramide.

b Toon aan, dat E op het verlengde van CB ligt.

c Bereken de coördinaten van het snijpunt van lijn EF en vlak TAB.

d Bereken de lengte van de loodrechte projectie van lijnstuk BF op vlak $ABCD$.

Vlak V gaat door A en F en is evenwijdig aan BD. V snijdt ribbe BT in punt G.

e Bereken de coördinaten van G.

Op ribbe AD ligt een punt H zo, dat de cosinus van de hoek tussen OH en CT gelijk is aan $\frac{2}{\sqrt{15}}$.

f Bereken de coördinaten van H.

Opgave 3

Gegeven zijn de punten $P(8,-1,0)$ en $Q(4,-3,6)$.
Geef een vectorvoorstelling van de verzameling van alle punten die gelijke afstand tot P en Q hebben.

Opgave 4

De zeshoekige piramide $T.ABCDEF$ wordt gegeven door $A(5,1,0)$, $B(5,3,0)$, $C(3,5,0)$, $D(1,5,0)$, $E(1,3,0)$, $F(3,1,0)$ en $T(3,3,4)$.

a Stel van de lijnen AT en CT een vectorvoorstelling op.

b Bereken in graden nauwkeurig de hoek waaronder AT en CT elkaar snijden.

c Bereken het snijpunt van de lijnen CE en AF.

d Bereken in twee decimalen de afstand van punt A tot lijn DT.

Opgave 5

In dit rechte driezijdige prisma $ABC.DEF$ geldt: $AC = AB = 5$ en $AD = BC = 6$. Punt P is het midden van CF en punt Q is het midden van AD.

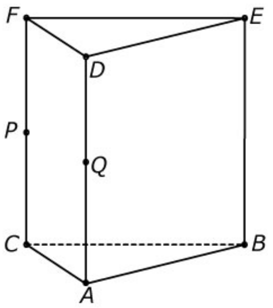
a Teken het prisma in een cartesisch coördinatenstelsel $Oxyz$ zo, dat O het midden van BC is, punt A op de x-as ligt en B en C op de y-as liggen. Teken ook de punten P en Q. (De eenheden op de assen passen bij de gegeven lengtes.)

b Toon aan dat de lijnen BF en DP elkaar loodrecht kruisen.

c Bepaal de coördinaten van het punt K op lijn AP zo, dat $|KF| = |KB|$.

d Toon aan dat driehoek BDK een gelijkbenige driehoek is.

e Bereken de coördinaten van punt L op BF zo, dat de inhoud van piramide $L.ABC$ gelijk is aan 10.



Figuur 2

Opgave 6

Een afgeknotte balk $ABCD.EFG$ is in een cartesisch $Oxyz$-assenstelsel gegeven door $A(6,0,0)$, $B(0,0,-6)$, $C(-6,0,0)$, $D(0,0,6)$, $E(0,6,-6)$, $F(-6,6,0)$ en $G(0,6,6)$.

a Teken deze afgeknotte balk.

Punt M is het midden van AG en punt N is het midden van AE.

b Bereken de hoek die de lijnen MN en MF met elkaar maken.

Een lijn door C snijdt de lijn AF en de lijn GN. Het snijpunt met GN is punt P.

c Bereken de lengte van CP.

Het vlak door de punten C, M en N snijdt ribbe DG in Q en ribbe BE in R.

d Bereken de coördinaten van Q en R.

Opgave 7

Kubus $OABC.DEFG$ is in een cartesisch $Oxyz$-assenstelsel gegeven door de punten $A(6,-8,0)$, $C(8,6,0)$ en $D(0,0,10)$. P is het punt $(0,0,15)$.

a Teken de kubus.

b Bereken de coördinaten van de punten op lijn AG die een afstand van $\sqrt{8}$ hebben tot het diagonaalvlak $OBFD$.

M is het midden van AE en N dat van CG. Het vlak V gaat door P, M en N.

c Bereken de coördinaten van de snijpunten van dit vlak met de ribben van de kubus.
Teken nu het deel van dit vlak dat binnen de kubus ligt.

d Bereken in graden nauwkeurig de hoek die dit vlak maakt met het grondvlak $OABC$ van de kubus.

e Het vlak met vergelijking $x = p$, met $0 \leq p \leq 6$, snijdt de kubus volgens een rechthoek met een oppervlakte van 10. Bereken p.

Toepassen

Opgave 8: Octaëder

Een octaëder is een regelmatig achtvlak. Alle ribben van zo'n achtvlak zijn even lang. De figuur bestaat uit acht gelijkzijdige driehoeken.

a Bereken de hoek tussen twee grensvlakken die een ribbe van het achtvlak gemeenschappelijk hebben.

b Onderzoek welke mogelijke hoeken de ribben van de octaëder met elkaar kunnen maken.

Opgave 9: Drievlakkenstelling

Gegeven is de piramide $T.OABC$ met $A(6,0,0)$, $B(6,6,0)$, $C(0,6,0)$ en $T(3,3,12)$. Verder zijn gegeven de punten $P(2,2,8)$, $Q(5,1,4)$ en $R\left(1\frac{1}{2},4\frac{1}{2},6\right)$.

a Laat zien dat de punten P, Q en R op ribben van de piramide liggen.

b Teken de piramide en deze drie punten.

De drievlakkenstelling gaat over de onderlinge ligging van drie vlakken. Het is een belangrijke stelling omdat bij ruimtelijke figuren met platte grensvlakken in de hoekpunten minstens drie vlakken bij elkaar komen.

Als van drie vlakken er geen twee evenwijdig zijn, hebben ze drie snijlijnen. Die drie snijlijnen gaan door één punt of ze zijn evenwijdig.

Zijn precies twee van de drie vlakken evenwijdig, dan hebben de drie vlakken twee evenwijdige snijlijnen. Zijn alle drie de vlakken evenwijdig, dan zijn er geen snijlijnen.

Bij constructies van doorsneden wordt deze drievlakkenstelling veel gebruikt.

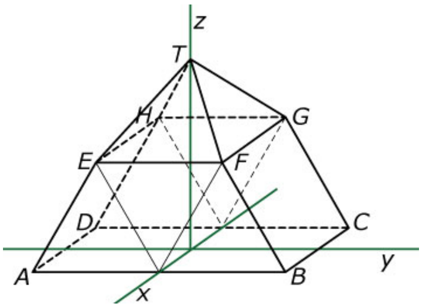
c Vlak PQR snijdt ook het grondvlak $OABC$ van de piramide. Leg uit hoe je met behulp van de drievlakkenstelling de snijlijn van PQR en $OABC$ kunt tekenen.

d Je kunt deze snijlijn ook berekenen. Gebruik de vergelijkingen van de vlakken PQR en $OABC$ om een vectorvoorstelling van de snijlijn van beide te vinden. Ga na, dat je dezelfde lijn krijgt als bij c.

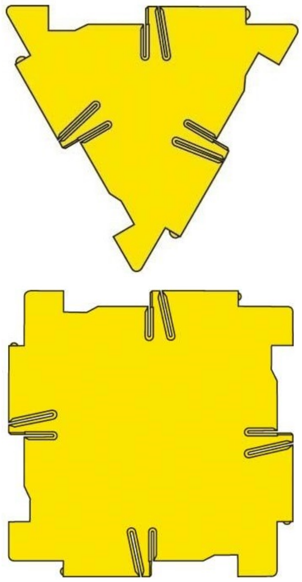
e Teken de complete doorsnede van vlak PQR met de piramide (dus alle snijlijnen met de grensvlakken).

Opgave 10: Spelen met Polydron

Misschien ken je Polydron wel, bouwmateriaal voor ruimtelijke figuren bestaande uit aan elkaar te klikken vierkanten, driehoeken, vijfhoeken, etc. Hier zie je een vierkant en een gelijkzijdige driehoek van Polydron. Met 4 van deze vierkanten en 10 van deze gelijkzijdige driehoeken maak je de figuur hieronder. Hij is in een assenstelsel geplaatst waardoor de hoekpunten van grondvlak $ABCD$ (dat uit twee vierkanten bestaat) de coördinaten $A(3,-6,0)$, $B(3,6,0)$, $C(-3,6,0)$ en $D(-3,-6,0)$ hebben.



Figuur 4



Figuur 3

a Bepaal nu zelf de coördinaten van de hoekpunten E, F, G, H en T.

b Toon aan dat vierkant $BCGF$ en driehoek FGT niet in één vlak liggen en bereken de hoek die ze met elkaar maken.

c Onderzoek of de lijnen BF en GT elkaar snijden. Snijden ze elkaar niet, bereken dan hun kortste onderlinge afstand.

d Bereken de hoek die de lijnen CE en ET met elkaar maken.

e Het vlak door E, C en T snijdt nog meer ribben van de figuur. Welke ribben?

Examen

Opgave 11: Vlak in piramide

Ten opzichte van een cartesisch assenstelsel $Oxyz$ zijn gegeven de punten $A(12,0,0)$, $C(0,12,0)$ en $T(12,12,0)$. Deze punten zijn hoekpunten van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ met T als top.

a Teken in een ruimtelijke figuur de doorsnede van de piramide en het vlak met vergelijking $y = 8$. Geef een duidelijke toelichting, bijvoorbeeld door berekening van de snijpunten van dit vlak met alle ribben van de piramide.

b Bereken de oppervlakte van deze doorsnede.

De lijn AE snijdt het vlak met vergelijking $y = 8$ in het punt S.

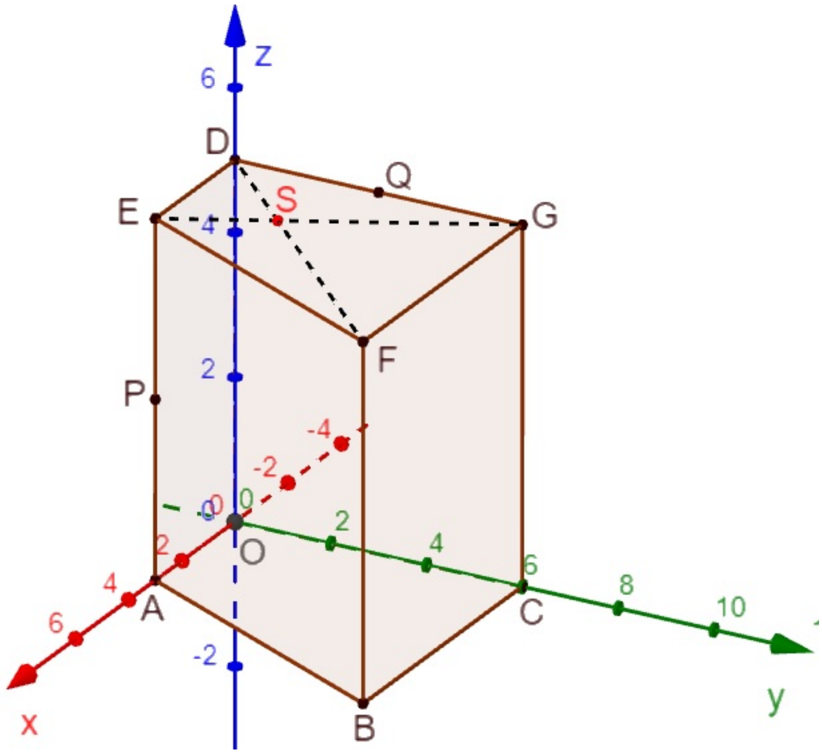
c Bereken de coördinaten van S.

Op de ribbe BT ligt een punt F zo, dat de som van de lengten van de lijnstukken AF en FE minimaal is.

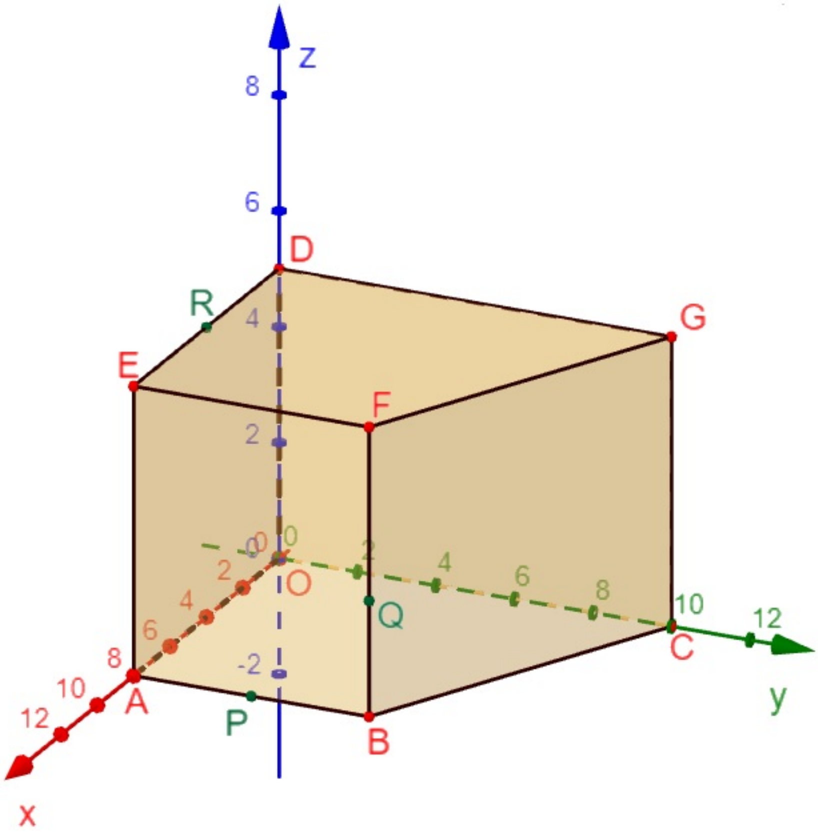
d Bereken $AF + FE$.

(bron: examen wiskunde B havo 1985, eerste tijdvak)

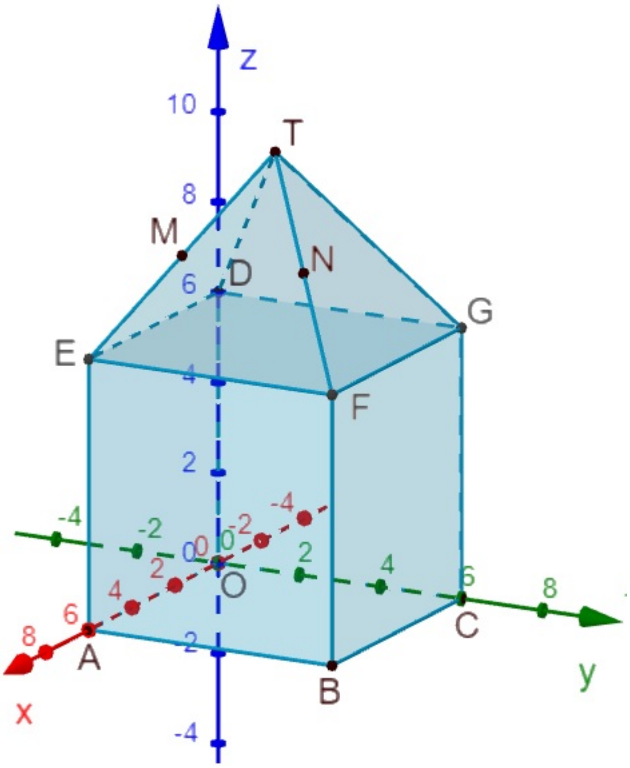
Werkblad bij.



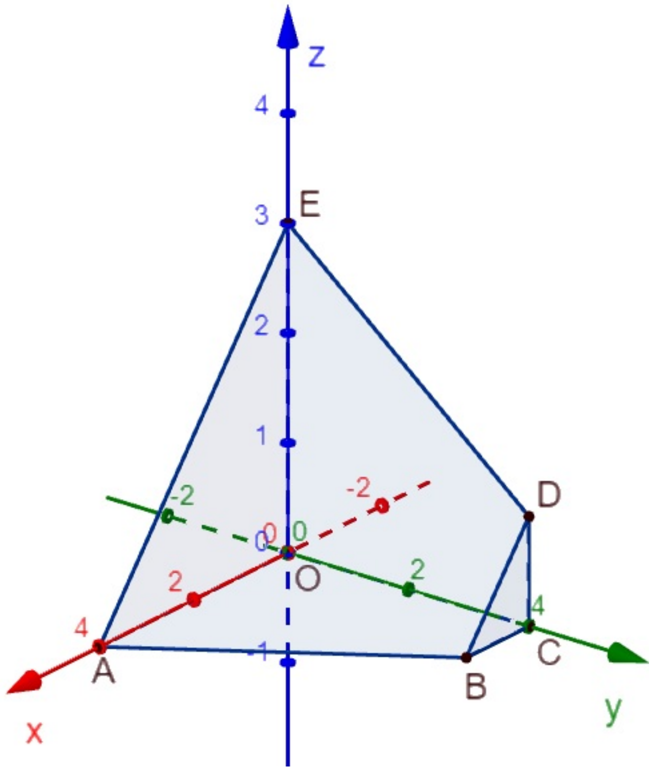
Werkblad bij.



Werkblad bij.



Werkblad bij.



Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.