

3.6 Hoeken en afstanden

Inleiding

Je hebt al veel situaties voorbij zien komen waarin je hoeken en afstanden moest berekenen. Maar bijvoorbeeld de hoek tussen twee vlakken, de afstand tussen een lijn en een vlak, de afstand tussen twee kruisende lijnen zijn nog niet aan bod geweest. En die zou je natuurlijk niet willen missen...

Je leert in dit onderwerp

- de hoek tussen een lijn en een vlak berekenen;
- de hoek tussen twee vlakken berekenen;
- de afstand tussen twee lijnen, tussen een lijn en een vlak, of tussen twee vlakken berekenen;

Voorkennis

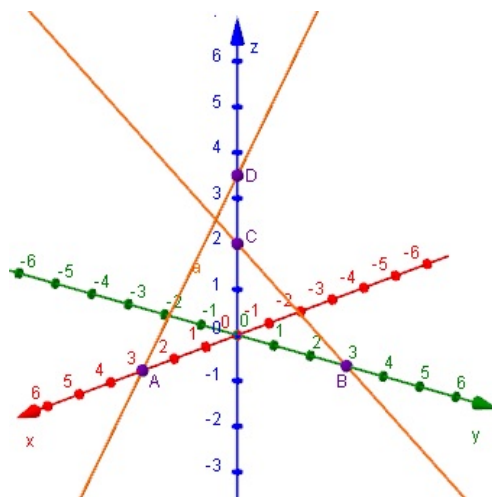
- met vectoren rekenen in 3D, het inproduct van twee vectoren gebruiken;
- werken met vectorvoorstellingen van lijnen en vlakken en vergelijkingen van vlakken in 3D.

Verkennen

Opgave V1

De twee lijnen AD en BC hebben geen snijpunt, het zijn kruisende lijnen.

- Wat versta je onder de kortste onderlinge afstand van twee lijnen?
- Kun je een manier beschrijven om de kortste onderlinge afstand van twee lijnen te berekenen?



Figuur 1 Zie figuurapplet.

Uitleg 1

Gegeven zijn weer de lijnen AD en BC , waarbij $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,2)$ en $D(0;0;3,5)$. Zoals je in de vorige paragraaf hebt gezien, zijn dit twee kruisende lijnen (ze zijn niet evenwijdig met elkaar en ze snijden elkaar ook niet).

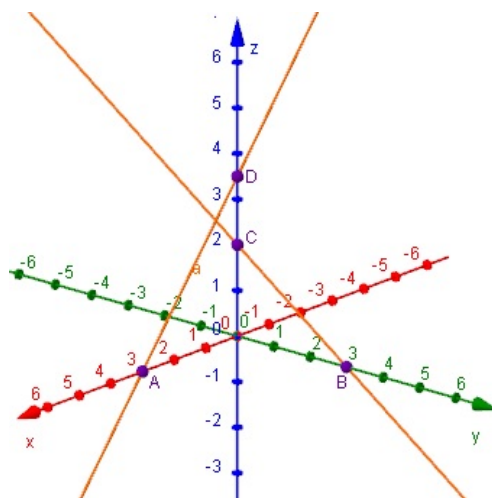
Hun kortste onderlinge afstand is de lengte van de vector die zowel loodrecht staat op lijn AD als op lijn BC . Deze zie je als je precies langs bijvoorbeeld lijn BC kijkt.

De andere lijn zie je dan in een vlak V liggen.

V is een vlak waar AD in ligt en dat evenwijdig is met BC .

Een vectorvoorstelling van V is dus te schrijven als:
 $\vec{OA} + p \cdot \vec{AD} + q \cdot \vec{BC}$

De kortste onderlinge afstand tussen de lijnen is dan hetzelfde als de afstand van een willekeurig punt van lijn BC tot dit vlak V .



Figuur 2 Zie figuurapplet.

Opgave 1

In **Uitleg 1** wordt besproken hoe je de kortste onderlinge afstand van twee kruisende lijnen berekent. Maar lijnen kunnen elkaar ook snijden of evenwijdig lopen.

- a Als twee lijnen elkaar snijden, hoe groot is dan hun onderlinge afstand?
- b Hoe bereken je de afstand tussen twee evenwijdige lijnen?

Opgave 2

Bereken, op de manier zoals in **Uitleg 1** staat, de afstand tussen de kruisende lijnen AD en BC . Rond af op één decimaal.

Uitleg 2

Hier zie je vlak ABC en lijn AD . Ook de normaalvector van het vlak in punt A is getekend. De lijn en het vlak snijden elkaar in punt A , maar onder welke hoek?

Ook nu is het belangrijk om vanuit een goede hoek naar de figuur te kijken. Je moet namelijk precies langs het vlak kijken (je ziet het vlak dan als lijn). Maar zelfs dan zijn er nog meerdere hoeken mogelijk. Je moet ook loodrecht op het vlak door de lijn AD en de normaal kijken.

De hoek die de lijn AD en vlak ABC met elkaar maken is dan te zien. Het is de hoek tussen lijn AD en zijn loodrechte projectie AD' waarbij D' in vlak ABC ligt.

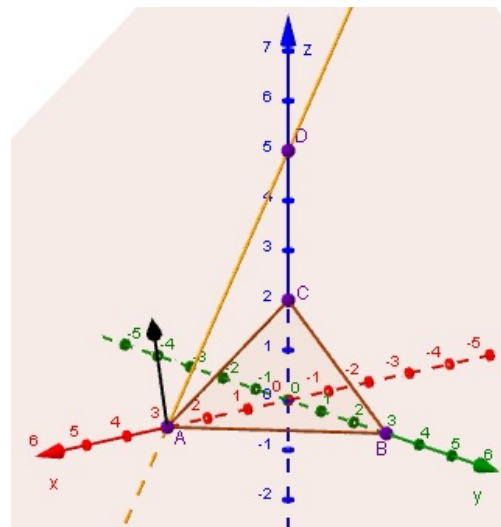
Deze hoek is samen met de hoek tussen lijn AD en de normaalvector precies 90° .

Je berekent de hoek tussen lijn AD en vlak ABC door de hoek φ tussen de richtingsvector van de lijn en de normaalvector van het vlak te berekenen.

De gevraagde hoek is dan het complement daarvan, dus $90^\circ - \varphi$.

Met andere woorden: $\angle(l, V) = 90^\circ - \angle(\vec{rv}_l, \vec{n}_V)$

Zo kun je ook inzien dat de hoek tussen twee vlakken V en W gelijk is aan de hoek tussen de normaalvectoren van die twee vlakken. Met andere woorden: $\angle(V, W) = \angle(\vec{n}_V, \vec{n}_W)$. Vectorrekening blijkt nu heel erg handig te zijn. Want om die hoeken in een figuur te herkennen is vaak nog een hele klus.



Figuur 3 Zie figuurapplet.

Opgave 3

In **Uitleg 2** zie je dat de hoek tussen een lijn en een vlak wordt berekend door de hoek tussen de normaalvector van het vlak en de richtingsvector van de lijn te berekenen.

Gegeven zijn de punten $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,2)$, $D(0,0,5)$ en $E(1,5; 1,5; 0)$.

- a Bereken eerst een normaalvector van het vlak ABC . Bepaal ook een richtingsvector van lijn ED .
- b Bereken nu de hoek tussen vlak ABC en lijn ED in graden nauwkeurig.

Opgave 4

Gegeven zijn de punten $P(5,0,0)$, $Q(0,5,0)$, $R(0,0,5)$ en $S(10,4, -5)$ en het vlak $V : 2x + 3y + 4z = 12$.

- a Welke van deze punten liggen in vlak V ?
- b Bereken de kortste onderlinge afstand van de lijnen PQ en RS . Rond af op twee decimalen.
- c Bereken in graden nauwkeurig de hoek die de lijnen PQ en RS met elkaar maken.
- d Bereken het snijpunt van lijn PQ met vlak V .

- e Bereken in graden nauwkeurig de hoek waaronder lijn PQ het vlak V snijdt.
- f Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen de vlakken PQR en V .

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Afstanden in \mathbb{R}^3 bereken je zo:

- De **afstand tussen twee punten** A en B is de lengte van hun verbindingsvector: $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$
- De **afstand van een punt tot een lijn** is de lengte van de loodrechte verbindingsvector van het punt P tot een willekeurig punt op de lijn l
- De **afstand van een punt tot een vlak** bereken je door een lijn door het punt P loodrecht op het vlak V met dat vlak te snijden. De afstand van het snijpunt S tot punt P is dan de gevraagde afstand.
- De **afstand tussen twee lijnen** bereken je door een vlak V door lijn l evenwijdig met lijn m te maken. De afstand van een willekeurig punt op lijn m tot dit vlak V is de gevraagde afstand.
- De **afstand van een lijn tot een vlak** heeft alleen betekenis als de lijn l evenwijdig is met het vlak V . De afstand van een willekeurig punt op lijn l tot vlak V is dan de gevraagde afstand.
- De **afstand tussen twee vlakken** heeft alleen betekenis als vlak V evenwijdig is met het vlak W . De afstand van een willekeurig punt op vlak V tot vlak W is dan de gevraagde afstand.

Hoeken in \mathbb{R}^3 bereken je zo:

- De **hoek tussen twee vectoren** bereken je met hun inproduct.
- De **hoek tussen twee lijnen** bereken je door de hoek tussen hun richtingsvectoren te berekenen. De gevraagde hoek is dan de daarbij passende scherpe hoek.
- De **hoek tussen een lijn en een vlak** is het complement van de hoek tussen een richtingsvector van de lijn en een normaalvector van het vlak.
- De **hoek tussen twee vlakken** is gelijk aan de hoek tussen normaalvectoren van beide vlakken.

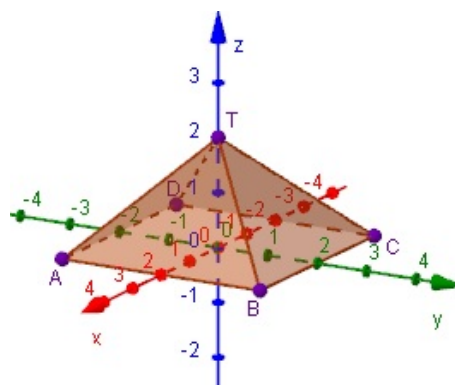
Voorbeeld 1

$T.ABCD$ is een regelmatige vierzijdige piramide met $A(2, -2, 0)$, $B(2, 2, 0)$ en $T(0, 0, 2)$. Laat zien dat lijn AB en lijn CT elkaar kruisen en bereken hun kortste onderlinge afstand.

Antwoord

$$AB: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en}$$

$$CT: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Figuur 4 [Zie figuurapplet.](#)

Beide lijnen zijn niet evenwijdig want hun richtingsvectoren zijn geen veelvoud van elkaar. Ze snijden of kruisen elkaar dus. Voor een snijpunt moeten er waarden van p en q bestaan waarvoor $(2, p, 0) = (-2 + q, 2 - q, q)$.

Ga na dat dergelijke waarden van p en q niet bestaan. De twee lijnen kruisen elkaar dus.

Hun kortste onderlinge afstand is de afstand van een punt van AB (bijvoorbeeld $(2, 0, 0)$) tot een vlak waar CT in ligt en dat evenwijdig is met AB . Hier is dat vlak CDT . Een vergelijking van dit vlak is $x - z = -2$ (ga zelf na). Stel nu lijn m door $(2, 0, 0)$ en loodrecht op vlak CDT op en snijd deze met hetzelfde vlak CDT .

Dus $m : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ snijden met $x - z = -2$ geeft $2 + r + r = -2$. Hieruit volgt dat $r = -2$. Door

deze waarde in te vullen in m krijg je het punt $(0,0,2)$, dit punt ligt het dichtst bij punt $(2,0,0)$. De afstand tussen deze twee punten is dan $\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Dit is de afstand van lijn AB tot lijn CD .

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** wordt de (kortste) afstand tussen twee kruisende lijnen berekend.

- a Maak de beschreven werkwijze duidelijk in een eigen tekening.
- b Hoe groot is de afstand van lijn AD tot vlak BCT ?
- c M is het midden van AB . Waarom heeft het vragen naar de afstand tussen lijn DM en vlak BCT geen betekenis?

Opgave 6

Gegeven zijn de lijnen $l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $m : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- a Laat zien dat de lijnen l en m elkaar kruisen.
- b Bereken de afstand tussen de lijnen l en m . Rond af op twee decimalen.

Voorbeeld 2

$T.ABCD$ is een regelmatige vierzijdige piramide met $A(2, -2, 0)$, $B(2, 2, 0)$ en $T(0, 0, 2)$.

Bereken de hoek die lijn CT maakt met vlak ABT .

Bereken ook de hoek die de vlakken ABT en BCT met elkaar maken.

Antwoord

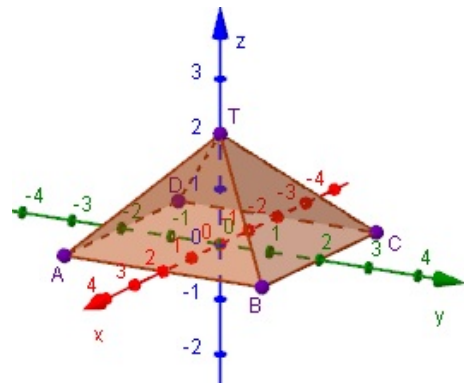
$$CT: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } ABT: x + z = 2.$$

Om de hoek die CT maakt met ABT te bepalen, bereken je eerst de hoek φ tussen een richtingsvector van de lijn en een normaalvector van het vlak met behulp van het inproduct:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\varphi) \text{ geeft } \varphi \approx 35^\circ.$$

De hoek tussen lijn CT en vlak ABT is ongeveer $90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

De hoek tussen de vlakken ABT en BCT is de hoek tussen beide normaalvectoren van die vlakken. Ga zelf na, dat de hoek tussen beide vlakken 60° is. (De normaalvectoren van beide vlakken kun je uit de figuur aflezen.)



Figuur 5 Zie figuurapplet.

Opgave 7

Omdat de hoek tussen een lijn en een vlak, of die tussen twee vlakken, vaak lastig te zien is in een figuur wordt in **Voorbeeld 2** getoond hoe je ze met behulp van de normaalvectoren van het vlak kunt berekenen.

- a Loop de berekening van de hoek tussen CT en vlak ABT na. Kun je die hoek ook in de figuur aangeven? Hoe dan?

- b Laat met een berekening zien, dat de hoek tussen de vlakken ABT en BCT inderdaad 60° is. Waar zit die hoek in de figuur?
- c Het is nuttig als je in "eenvoudige" gevallen zelf de gevraagde hoek kunt zien. Welke hoek is de hoek tussen CT en vlak $ABCD$? Hoe groot is die hoek?
- d Welke hoek is de hoek tussen de vlakken ABT en $ABCD$? Hoe groot is die hoek?

Opgave 8

Gegeven zijn twee vlakken en een lijn:

$$V : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$W : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- a Bereken de hoek tussen de twee vlakken V en W .
- b Bereken de hoek tussen lijn l en vlak V .
- c Bereken de hoek tussen lijn l en vlak W .

Verwerken

Opgave 9

Een kubus $ABCD.DEFG$ heeft ribben van 6 cm. Punt M is het midden van ribbe BF . Voor de volgende berekeningen kun je de kubus in een cartesisch assenstelsel $Oxyz$ plaatsen.

- a Hoe groot is de afstand tussen de lijnen AM en GH ?
- b Bereken exact de afstand tussen de lijnen BE en AG .

Opgave 10

Gegeven zijn de lijnen l en m en vlak V :

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$m : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V : x - 2y + 2z = 4$$

- a Bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen l en V .
- b Bereken de afstand tussen l en m . Rond af op twee decimalen.

Opgave 11

Van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ is het snijpunt van AC en BD de oorsprong van een cartesisch $Oxyz$ -assenstelsel. Verder is $A(4, -4, 0)$, $B(4, 4, 0)$ en $T(0, 0, 12)$. P ligt op AB zo, dat $|AP| : |PB| = 1 : 3$.

V is het vlak door P en evenwijdig aan vlak BCT .

- a Bereken de hoek die de vlakken ADT en V met elkaar maken in graden nauwkeurig.
- b Bereken de afstand tussen de vlakken V en BCT . Rond af op twee decimalen.

Opgave 12

Een regelmatige vierzijdige piramide $T.OABC$ heeft een grondvlak van 4 cm bij 4 cm en een hoogte van 5 cm en staat in een cartesisch $Oxyz$ -assenstelsel. Punt A is het punt $(4,0,0)$. Punt E is het snijpunt van de lijnen AC en OB . Punt D is het midden van TC .

- Bereken in graden nauwkeurig de hoek die de lijnen ED en AB met elkaar maken.
- Bereken in graden nauwkeurig de hoek die lijn BD maakt met vlak OBT .
- Bereken de coördinaten van het snijpunt van lijn BD met vlak OAT en bereken in graden nauwkeurig de hoek tussen BD en OAT .
- Bereken de afstand tussen de lijnen OD en TE . Rond af op twee decimalen.

Opgave 13

Gegeven is de balk $OABC.DEFG$ met $A(4,0,0)$, $C(0,8,0)$ en $D(0,0,4)$.

Punt P is het midden van ribbe EF .

- Bereken exact de afstand van punt P tot vlak AGC .
- Bereken exact de afstand van punt P tot lijn GB .
- Op ribbe EF ligt een punt M zo, dat de afstand van M tot vlak AGC gelijk is aan 2. Bereken exact de coördinaten van M .
- Bestaat er een punt N op ribbe EF zo, dat de afstand van dit punt tot lijn GB gelijk is aan 2? Verklaar je antwoord.

Opgave 14

Gegeven zijn de punten $A(-6,24,7)$, $B(-1,21,3)$, $C(-6,18,-1)$ en $D(-11,21,3)$.

Het vlak V heeft vergelijking $4x + y + 6z = 2$. Vierkant $ABCD$ is het grondvlak van een piramide $T.ABCD$ waarvan de top T in vlak V en op de middelloodlijn van AC loodrecht op vlak $ABCD$ ligt.

Bereken de hoogte van deze regelmatige vierzijdige piramide en bereken de lengte van ribbe AT . Rond af op twee decimalen.

Toepassen**Opgave 15: Kruisende lijnen**

De hoek tussen twee kruisende lijnen l en m is 60° . De loodrechte snijlijn van l en m snijdt l in A en m in B . Op l ligt punt P zo, dat $AP = 2$. Op m ligt punt Q zo, dat $BQ = 4$ en $PQ = 6$.

Bereken exact de lengte van lijnstuk AB en de afstand van AB tot PQ .

Er zijn twee mogelijkheden!

Testen**Opgave 16**

Een regelmatige vierzijdige piramide $T.OABC$ heeft een grondvlak van 4 cm bij 4 cm en een hoogte van 5 cm en staat in een cartesisch $Oxyz$ -assenstelsel. Punt A is het punt $(4,0,0)$. Punt E is het snijpunt van de lijnen AC en OB . Punt D is het midden van TC .

- Bereken de hoek die de lijnen ED en AB met elkaar maken.
- Bereken de hoek die lijn BD maakt met vlak OBT .
- Bereken de coördinaten van het snijpunt van lijn BD met vlak OAT en bereken de hoek tussen BD en OAT .
- Bereken de afstand tussen de lijnen OD en TE .



© 2022

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
