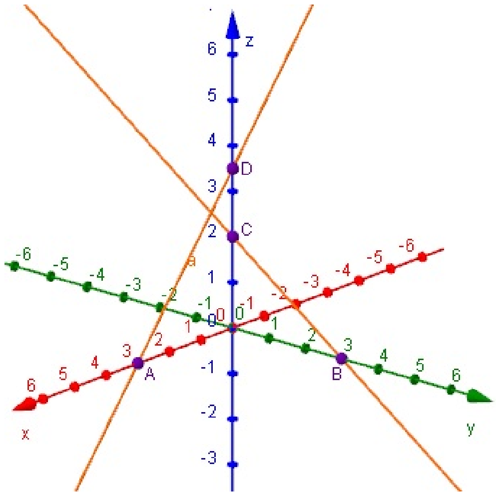
3.5 Onderlinge ligging

Inleiding

Zijn dit twee snijdende lijnen? Of kruisen ze elkaar? En wat versta je ook alweer onder 'kruisende lijnen'? En hoe bepaal je hun kortste onderlinge afstand? En hoe kunnen vlakken ten opzichte van elkaar liggen?
Over dergelijke vragen gaat dit onderdeel...



Figuur 1 Zie figuurapplet.

Je leert in dit onderwerp

- onderzoeken hoe punten, lijnen en vlakken t.o.v. elkaar liggen;
- snijpunten van lijnen en/of vlakken berekenen;
- de snijlijn van twee vlakken bepalen.

Voorkennis

- met vectoren rekenen in 3D, het inproduct van twee vectoren gebruiken;
- werken met vectorvoorstellingen van lijnen en vlakken in 3D.

Verkennen

Opgave V1

Je kunt je afvragen of de twee lijnen AD en BC een snijpunt hebben.

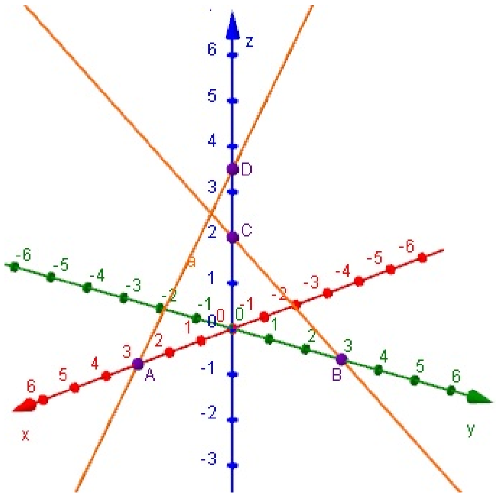
a Wat zijn kruisende lijnen?

b Welke mogelijkheden zijn er voor de onderlinge ligging van twee lijnen?

c Kun je een manier beschrijven om de hoek te vinden die deze lijnen met elkaar maken?

d Welke mogelijkheden zijn er voor de onderlinge ligging van twee vlakken?

e Welke mogelijkheden zijn er voor de onderlinge ligging van een lijn en een vlak?

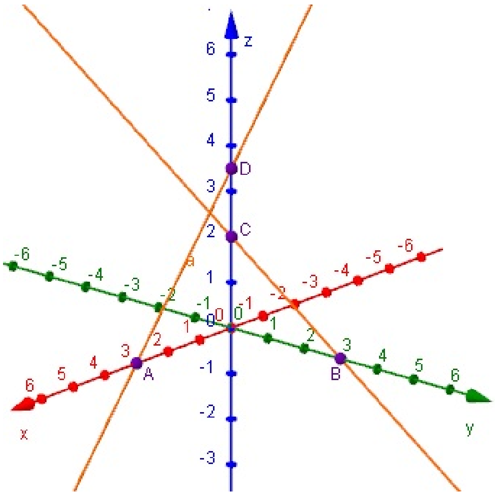


Figuur 2 Zie figuurapplet.

Uitleg 1

Gegeven zijn de punten $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,2)$ en $D(0;0;3{,}5)$.

In de figuur lijkt het dat de lijnen AD en BC elkaar snijden, maar als je de assen zo zou tekenen tot je precies langs een lijn kunt kijken zie je dat dit niet zo is. Ze zijn ook niet evenwijdig aan elkaar. Dit zijn daarom twee kruisende lijnen. Dat beide lijnen elkaar niet snijden kun je ook berekenen door hun vectorvoorstellingen aan elkaar gelijk te stellen.



Figuur 3 Zie figuurapplet.

- $AD: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$
- $BC: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

De coördinaten moeten aan elkaar gelijk zijn, dus:

$$\begin{pmatrix} 3-3p \\ 0 \\ 5p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3q \\ 2-2q \end{pmatrix}$$

Dit geeft drie vergelijkingen die strijdig met elkaar zijn. De lijnen AD en BC snijden elkaar dus niet.

De hoek die de lijnen AD en BC met elkaar maken is de hoek tussen hun beide richtingsvectoren. Daarvoor gebruik je het inproduct van beide richtingsvectoren.
Je vindt dan dat de hoek ongeveer 75° is. (Denk eraan dat je scherpe hoek neemt.)

Opgave 1

In **Uitleg 1** wordt besproken hoe je onderzoekt of twee lijnen elkaar snijden.

a Laat zien dat de lijnen AD en BC elkaar niet snijden.

b Beide lijnen lopen niet evenwijdig aan elkaar. Hoe zie je dat?

c Bereken de hoek φ die de lijnen AD en BC uit de uitleg met elkaar maken.

Opgave 2

Gegeven zijn de punten $A(2,3,5)$ en $B(-2,1,1)$ en lijn AB. Verder zijn gegeven de punten $C(0,-2,1)$ en $D(0,0,2)$ en lijn CD.

a Onderzoek of de lijnen AB en CD elkaar snijden, evenwijdig zijn, of elkaar kruisen.

b Onderzoek of de lijnen AC en BD elkaar snijden, evenwijdig zijn, of elkaar kruisen.

c Geef een mogelijke vectorvoorstelling van de lijn door C en evenwijdig met AB.

d Bereken de hoek φ die de lijnen AC en BD met elkaar maken.

Uitleg 2

Door de punten $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$ en $C(0,0,2)$ gaat het vlak ABC. Door de punten $D(5,0,0)$ en $E(0,0,5)$ gaat lijn DE.

Je wilt weten of lijn DE het vlak ABC snijdt en zo ja, in welk punt.

Je stelt daartoe een vergelijking van vlak ABC op en een vectorvoorstelling van lijn DE:

- Vlak ABC: $2x + 2y + 3z = 6$
- Lijn DE: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Als P een punt op de lijn is, geldt $P(5-t,0,t)$ en dit vul je in de vergelijking van het vlak in. Je krijgt $t = -4$ en dus het snijpunt $S(9,0,-4)$.

Je kunt ook een vectorvoorstelling opstellen van een lijn door D die evenwijdig loopt met het vlak. Dit kun je als volgt bepalen:

Bepaal een normaalvector van het vlak. Kies nu als richtingsvector van de evenwijdige lijn een vector die loodrecht staat op de normaalvector. De lengte van zo'n richtingsvector is niet van belang, dus je kunt altijd één van de drie kentallen 1 nemen. De richtingsvector van zo'n lijn wordt dan bijvoorbeeld $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ en moet voldoen aan $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$. Dit geeft nog allerlei mogelijke combinaties van a en b; er zijn immers nog oneindig veel mogelijke lijnen door D die evenwijdig zijn met vlak ABC.

Opgave 3

Bestudeer **Uitleg 2**.

a Ga na dat een vergelijking van ABC gegeven wordt door $2x+2y+3z = 6$ en voer zelf de berekening van het snijpunt S van lijn DE en vlak ABC nogmaals uit.

b Stel de vectorvoorstellingen van minstens twee lijnen door D op die evenwijdig lopen met het vlak ABC.

Opgave 4

Gebruik de punten die in **Uitleg 2** zijn gegeven. V is het vlak door D en E dat evenwijdig loopt met de y-as.

a Bereken het snijpunt T van vlak V met lijn AB.

De vlakken ABC en V hebben een snijlijn.

b Stel een vectorvoorstelling op van deze snijlijn. (Probeer twee punten van de snijlijn te vinden.)

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **onderlinge ligging** van punten, lijnen en vlakken:

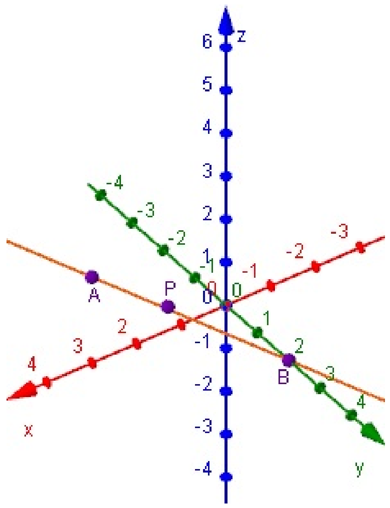
- Punt P ligt op lijn l: de coördinaten van punt P voldoen aan de vectorvoorstelling van lijn l.
- Punt P ligt in vlak V: de coördinaten van punt P voldoen aan de vergelijking (of vectorvoorstelling) van vlak V.
- Lijn l snijdt lijn m: beide vectorvoorstellingen hebben een gemeenschappelijk punt.
- Lijn l is evenwijdig lijn m: beide richtingsvectoren zijn elkaars veelvoud (beide lijnen kunnen dan ook samenvallen).
- Lijn l kruist lijn m: beide vectorvoorstellingen hebben geen gemeenschappelijk punt en de richtingsvectoren zijn geen veelvoud van elkaar.
- Lijn l ligt in vlak V: de vectorvoorstelling van lijn l voldoet aan de vergelijking van vlak V.
- Lijn l snijdt vlak V: de vectorvoorstelling van lijn l levert bij substitutie in de vergelijking van vlak V één snijpunt op.

- Lijn l is evenwijdig met vlak V: de richtingsvector van lijn l staat loodrecht op de normaalvector van vlak V en de vectorvoorstelling van lijn l levert bij substitutie in de vergelijking van vlak V geen snijpunt op.
- Vlak V snijdt vlak W: de normaalvectoren van beide vlakken zijn geen veelvoud van elkaar en door combineren van beide vergelijkingen vind je een snijlijn.
- Vlak V is evenwijdig met vlak W: de normaalvectoren van beide vlakken zijn elkaars veelvoud (beide vlakken kunnen dan ook samenvallen).

Voorbeeld 1

Gegeven zijn de punten $A(3{,}0{,}2)$, $B(0{,}2{,}0)$ en $P(2;1;1{,}5)$.

Lijn l gaat door de punten A en B.
Onderzoek of P op lijn l ligt en zo nee, bereken de afstand van P tot l, ofwel $\text{d}(P,l)$.



Figuur 4 Zie figuurapplet.

Antwoord

Een vectorvoorstelling van lijn l is:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Als P op l ligt, dan is er een waarde van t waarvoor geldt $(2;1;1{,}5) = (3t, 2-2t, 2t)$.
Ga zelf na dat zo'n waarde van t niet bestaat.

Punt Q is een punt op lijn l.

De afstand van P tot lijn l is de lengte van de vector $\overrightarrow{PQ}$, waarbij met Q op lijn l ligt, zo dat $\overrightarrow{PQ}$ loodrecht staat op l.

Het punt Q is te schrijven als $(3t, 2-2t, 2t)$. Nu moet $\overrightarrow{PQ}$ loodrecht staan op de richtingsvector $\overrightarrow{AB}$. Dus moet het inproduct van die vectoren 0 zijn:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3t-2 \\ 1-2t \\ 2t-1{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Dit geeft $t = \frac{11}{17}$ en dus $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{17} \\ -\frac{5}{17} \\ -\frac{7}{34} \end{pmatrix}$.

Nu kun je de afstand van P tot l bereken:

$$\text{d}(P,l) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \approx 0{,}36$$

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** zie je hoe je nagaat of een punt op een lijn ligt.

a Reken na dat $t = \frac{11}{17}$ en $\text{d}(P,l) \approx 0{,}36$

b Onderzoek of het punt $R(12,-6,8)$ op lijn l ligt.

c Onderzoek of lijn OP lijn l snijdt.

d Bereken de afstand $d(R,AP)$.

Opgave 6

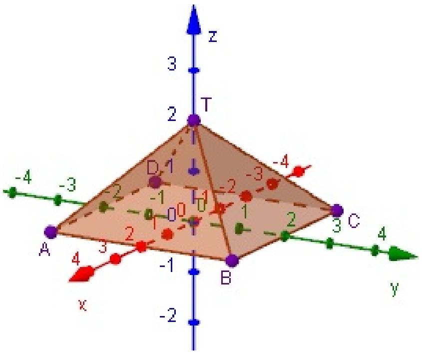
Gegeven is lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

a Onderzoek of punt $S(9{,}5; -0{,}5; 10)$ op lijn l ligt.

b Bereken de afstand van punt $P(1{,}0{,}0)$ tot lijn l. Rond af op twee decimalen.

Voorbeeld 2

$T.ABCD$ is een regelmatige vierzijdige piramide met $A(2,-2,0)$, $B(2,2,0)$ en $T(0,0,2)$. Laat zien dat lijn AB en lijn CT elkaar kruisen en bereken de hoek die ze met elkaar maken.



Figuur 5 Zie figuurapplet.

Antwoord

Vectorvoorstellingen van de lijnen AB en CT zijn:

$$AB: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$CT: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beide lijnen zijn niet evenwijdig want hun richtingsvectoren zijn geen veelvoud van elkaar. Ze snijden of kruisen elkaar dus. Voor een snijpunt moeten er waarden van p en q bestaan waarvoor $(2,p,0) = (-2+q, 2+q, q)$.

Ga na dat dergelijke waarden van p en q niet bestaan. De twee lijnen kruisen elkaar dus.

Hun onderlinge hoek wordt bepaald door de hoek tussen beide richtingsvectoren. Deze kun je berekenen met behulp van het inproduct:

$1 = 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos(\varphi)$, dus $\varphi = \angle(AB, CT) \approx 55°$

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**. Laat M het midden zijn van CT en N het midden van DT.

a Laat met een berekening zien dat de lijnen BM en AN elkaar snijden.

b Bereken de hoek tussen de lijnen BM en AN in graden nauwkeurig.

Opgave 8

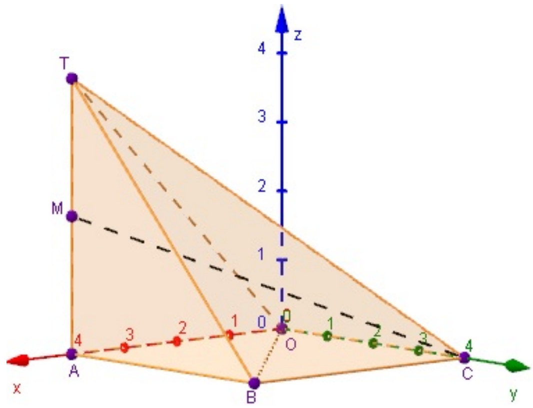
Gegeven zijn de lijnen $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ en $m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a Bereken de waarde van a waarvoor de lijnen l en m elkaar snijden.

b Neem voor $a = 4$. Bereken de hoek tussen de lijnen l en m.

Voorbeeld 3

Gegeven piramide $T.OABC$ met $A(4,0,0)$, $B(4,4,0)$, $C(0,4,0)$ en $T(4,0,4)$.
M is het midden van AT.
Stel een vectorvoorstelling op van de snijlijn van de vlakken BCT en OCM.



Figuur 6 **Zie figuurapplet.**

Antwoord

Stel hiervoor eerst de vergelijkingen op die bij de vlakken horen. Deze zijn:
$BCT: y + z = 4$ en $OCM: x - 2z = 0$.
Om een vectorvoorstelling van de snijlijn op te stellen, zoek je twee punten die aan beide vergelijkingen voldoen. Neem bijvoorbeeld de punten $P(4,2,2)$ en $Q(6,1,3)$.

Een vectorvoorstelling van de snijlijn is dan: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Opgave 9

In **Voorbeeld 3** staat dat je op zoek moet gaan naar twee punten die in beide vlakken liggen.

a Zoek nu zelf twee andere punten R en S die ook aan beide vergelijkingen (van de twee vlakken) voldoen en stel hiermee een vectorvoorstelling van de snijlijn op. Ga na dat deze lijn dezelfde lijn is als in het voorbeeld.

P is het midden van OT.

b Bereken het snijpunt van lijn BP en vlak ACT.

c Geef een mogelijke lijn die evenwijdig is met vlak OCM en door het punt B gaat.

Opgave 10

In **Voorbeeld 3** zie je hoe je de snijlijn van twee vlakken kunt bepalen.

a Stel vectorvoorstellingen van de vlakken BCT en OCM op.

Je kunt ook de snijlijn bepalen door beide vectorvoorstellingen aan elkaar gelijk te stellen. Je krijgt dan drie vergelijkingen met vier onbekenden. Je kunt dan drie van deze onbekenden allemaal uitdrukken in de vierde en zo de vectorvoorstelling van de snijlijn opstellen.

b Laat zien hoe dit gaat.

c Geef een vectorvoorstelling van de snijlijn van de vlakken BCT en OCT door twee punten te zoeken die in beide vlakken liggen.

Verwerken

Opgave 11

Gegeven zijn de lijnen l en m en vlak V:

$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V: x - 2y + 2z = 4$

a Bereken de coördinaten van het snijpunt P van lijn l en vlak V.

b Bereken exact de afstand van $A(1,2,3)$ tot V.

c Vlak W is evenwijdig met lijn m en lijn l ligt in W.
Bereken de snijlijn van V en W.

d Op m ligt een punt P zo, dat $\overrightarrow{AP} // V$. Bereken de coördinaten van P.

Opgave 12

Gegeven is het viervlak $C.OAB$ met $A(6,0,0)$, $B(0,6,0)$ en $C(0,0,6)$.
Punt N is het midden van AB en M dat van OA.
Punt Z is het zwaartepunt van ΔABC.

a Geef vectorvoorstellingen van de lijnen CN en OZ.

b Vlak BCM snijdt OZ in punt S. Bereken de coördinaten van S.

c Toon aan dat het punt S de lijn OZ zo verdeelt dat $|OS| : |SZ| = 3 : 1$.

d Bereken exact de afstand van punt A tot vlak BCM.

Opgave 13

Een kubus $ABCD.EFGH$ heeft ribben van 6 cm. Punt M is het midden van ribbe BF. Voor de volgende berekeningen kun je de kubus in een cartesisch assenstelsel $Oxyz$ plaatsen.

a Teken de kubus en punt M. Kies A in de oorsprong.

b Bereken de afstand van punt E tot vlak AMH.

c Vlak V gaat door AE en staat loodrecht op vlak AMH. Stel een vectorvoorstelling op van de snijlijn van vlak V met vlak AMH.

d Bereken exact de afstand van het midden N van ribbe CG tot lijn AG.

Opgave 14

Van een regelmatige vierzijdige piramide $T.ABCD$ is het snijpunt van AC en BD de oorsprong van een cartesisch $Oxyz$-assenstelsel. Verder is $A(4,-4,0)$, $B(4,4,0)$ en $T(0,0,12)$. P ligt op AB zo, dat $|AP| : |PB| = 1 : 3$.
Vlak V is het vlak door P en evenwijdig aan vlak BCT.

a Stel een vectorvoorstelling van V op.

b Bepaal de coördinaten van het snijpunt van lijn AT en vlak V.

c Geef een vectorvoorstelling van de snijlijn van V en vlak DCT.

Opgave 15

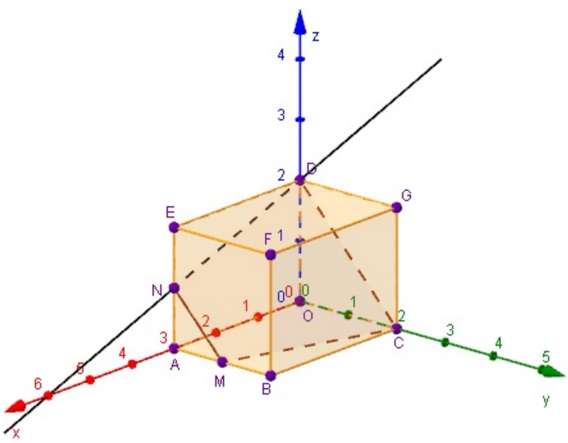
Bekijk de balk $OABC.DEFG$ met $A(3,0,0)$, $C(0,2,0)$ en $D(0,0,2)$. Verder is M het midden van AB en N dat van AE.

a Onderzoek of de lijnen DB en CN een snijpunt hebben.

b De vlakken $DNMC$ en GEF snijden elkaar volgens een lijn l. Maak een vectorvoorstelling van die lijn door de twee vectorvoorstellingen van de vlakken aan elkaar gelijk te stellen.

c Je kunt ook een vectorvoorstelling van l maken door twee punten op te zoeken die aan beide vergelijkingen van de vlakken voldoen. Bepaal ook op die manier een vectorvoorstelling van l.

d Bereken de snijpunten van l met de vlakken $ABFE$ en $BCGF$.



Figuur 7 Zie figuurapplet.

Opgave 16

Gegeven is lijn $l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ en vlak $V : 2x - 5y + z = 10$.

a Toon aan dat lijn l evenwijdig is met vlak V.

b Geef een vectorvoorstelling van een lijn die vlak V snijdt.

c Geef een vergelijking van een vlak dat evenwijdig is met vlak V.

Opgave 17

Gegeven zijn de lijnen $l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $m : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a Laat zien dat de lijnen l en m elkaar snijden.

b Laat zien dat het punt $A(5,1,6)$ op lijn l en het punt $B(1,4,7)$ op lijn m even ver van het snijpunt liggen.

c Geef de twee vergelijkingen van de vlakken waarvoor geldt dat alle punten in die vlakken even ver van lijn l als van lijn m liggen.

Toepassen

Opgave 18: Schaduw

Een regelmatige vierzijdige piramide $T.OABC$ heeft een grondvlak van 4 cm bij 4 cm en een hoogte van 5 cm en staat in een cartesisch $Oxyz$-assenstelsel.
Punt A is het punt $(4,0,0)$.
Op de z-as is een lichtbron opgehangen in het punt $L(0,0,8)$. De piramide is ondoorzichtig. Door de lichtbron ontstaat er een schaduw op de grond.

a Bereken de oppervlakte van deze schaduw.

b Bereken de afstand van L tot ribbe OT in mm decimalen nauwkeurig.

Testen

Opgave 19

Een regelmatige vierzijdige piramide $T.OABC$ heeft een grondvlak van 4 cm bij 4 cm en een hoogte van 5 cm en staat in een cartesisch $Oxyz$-assenstelsel. Punt A is het punt $(4,0,0)$. Punt E is het snijpunt van de lijnen AC en OB. Punt D is het midden van TC.

a Laat door berekening zien dat de lijnen ED en AB elkaar kruisen.

b Bereken de hoek die de lijnen ED en AB met elkaar maken.

c Bereken de coördinaten van het snijpunt van lijn BD met vlak OAT.

d Bereken de afstand van punt B tot vlak OAT.

Opgave 20

Gegeven zijn de punten $P(8,-1,0)$ en $Q(4,-3,6)$.
Geef een vectorvoorstelling van de verzameling van alle punten die gelijke afstand tot P en Q hebben.