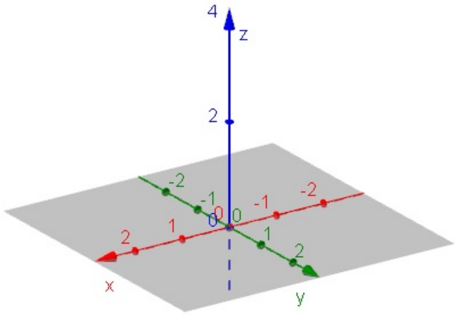
3.4 Vlakken

Inleiding

Ook vlakken in de ruimte kun je beschrijven met vectorvoorstellingen. Alleen heb je dan twee parameters nodig. Je kunt echter een vlak in de ruimte ook door middel van een vergelijking beschrijven. En dat geldt niet alleen voor platte vlakken, maar voor allerlei oppervlakken...
Het werken met vergelijkingen van vlakken blijkt vaak handiger te zijn dan het gebruiken van parametervoorstellingen.



Figuur 1 Zie figuurapplet.

Je leert in dit onderwerp

- een vectorvoorstelling van een vlak opstellen;
- het begrip normaalvector;
- een vectorvoorstelling van een vlak omzetten in een vergelijking en omgekeerd;
- de afstand van een punt tot een vlak berekenen.

Voorkennis

- met vectoren rekenen in 3D, het inproduct van twee vectoren gebruiken;
- werken met vectorvoorstellingen van lijnen in 3D.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een vlak door de drie punten A, B en C. De vergelijking van het vlak staat er bij.

a Controleer dat deze drie punten aan de vergelijking voldoen.

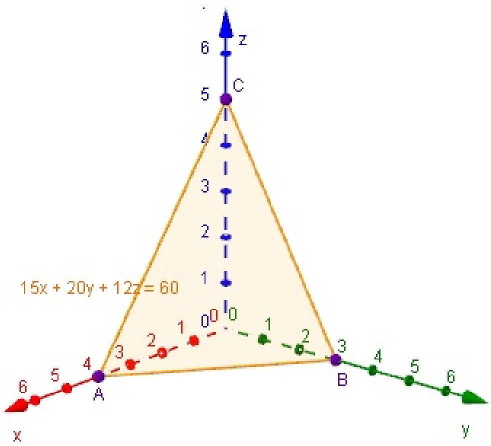
b Kun je de vergelijking eenvoudiger schrijven?

c Bekijk wat er met de vergelijking gebeurt als je één of meer van de drie gegeven punten verschuift over de as.

d Welke (heel eenvoudige) vergelijking hoort er bij het Oxy-vlak?

e Waarom kun je de lijn AB niet met één vergelijking beschrijven, denk je?

f Wat stelt $x + y = 4$ in deze situatie voor?



Figuur 2 Zie figuurapplet.

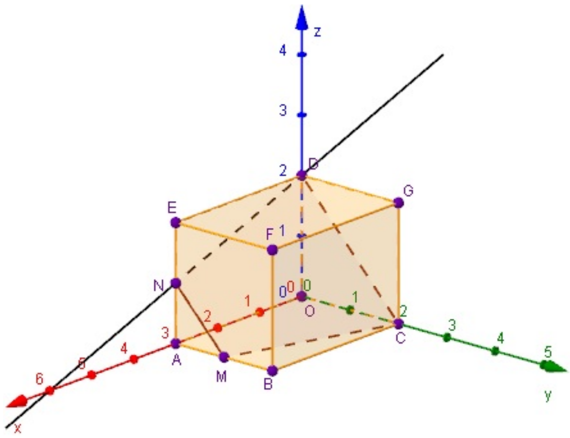
Uitleg 1

Je ziet hier een balk $OABC.DEFG$ met $A(3,0,0)$, $C(0,2,0)$ en $D(0,0,2)$. Verder is M het midden van AB en N dat van AE.

In de vorige paragraaf heb je gezien dat een vectorvoorstelling van een lijn bepaald wordt door een steunvector en een richtingsvector. Zo is een vectorvoorstelling van lijn DN bijvoorbeeld:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Je kunt ook een vectorvoorstelling van een vlak geven, alleen dan heb je naast een steunvector twee richtingsvectoren nodig.



Figuur 3 **Zie figuurapplet.**

Voor elk punt P in het vlak $MCDN$ geldt: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + p \cdot \overrightarrow{DN} + q \cdot \overrightarrow{DC}$ (waarbij in dit geval $\overrightarrow{OD}$ de steunvector is en $\overrightarrow{DN}$ en $\overrightarrow{DC}$ de richtingsvectoren).

Een vectorvoorstelling van dit vlak is daarom $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Dus is $P(x,y,z) = (3p, 2q, 2 - p - 2q)$. Hieruit volgt: $p = \frac{1}{3}x$ en $q = \frac{1}{2}y$.

Substitueer je dit in $z = 2 - p - 2q$, dan vind je de vergelijking $x + 3y + 3z = 6$.
Een vlak is in $\mathbb{R}^3$ dus met één vergelijking te beschrijven. Ga zelf na, dat de coördinaten van M inderdaad aan de vergelijking voldoen.

Je kunt vlak $MCDN$ bijvoorbeeld ook met de volgende steunvector en richtingsvectoren aangeven: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + u \cdot \overrightarrow{CM} + v \cdot \overrightarrow{CD}$.

De twee richtingsvectoren moeten in ieder geval in het vlak liggen en niet evenwijdig lopen (geen veelvoud van elkaar zijn).

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**.

a Controleer dat M in het vlak met vergelijking $x + 3y + 3z = 6$ ligt.

b Stel nu aan de hand van $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + u \cdot \overrightarrow{CM} + v \cdot \overrightarrow{CD}$ een vectorvoorstelling op van vlak $MCDN$.

c Stel van het vlak EFC een vectorvoorstelling en een vergelijking op.

Opgave 2

Bekijk weer **Uitleg 1**. Je ziet een vectorvoorstelling van lijn DN.

a Laat zelf zien dat alle punten op die lijn voldoen aan $x + 3z = 6$.

b Noem een paar punten die niet op lijn DN liggen, maar wel aan deze vergelijking voldoen.

c Om de punten op de lijn DN te beschrijven heb je behalve $x + 3z = 6$ nog een vergelijking nodig. Welke bijvoorbeeld?

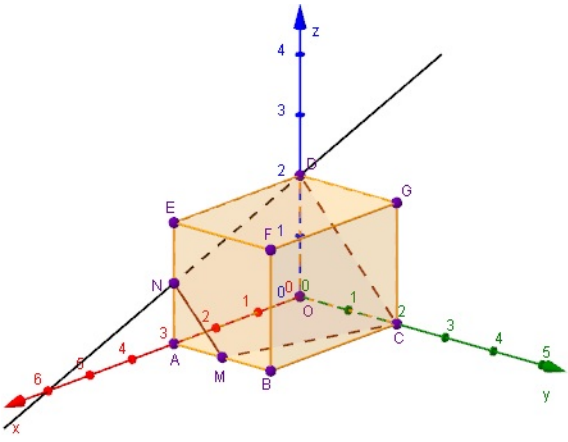
Uitleg 2

In de vorige uitleg zag je dat de vectorvoorstelling van vlak $MCDN$ gegeven wordt door:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Je hebt gezien dat je dit vlak ook kunt beschrijven door de vergelijking $x+3y+3z=6$. Het bijzondere aan deze vergelijking is dat de coëfficiënten voor de x, y en z een vector vormen die loodrecht staat op beide richtingsvectoren van het vlak $MCDN$.

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ staat loodrecht op $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.



Figuur 4 **Zie figuurapplet.**

$\vec{n}$ staat daarom loodrecht op vlak $MCDN$ en wordt wel de normaalvector van dit vlak genoemd.

Je kunt ook met behulp van de normaalvector de richtingsvectoren van het vlak bepalen. Daarvoor moet je twee verschillende, niet evenwijdige of in elkaars verlengde liggende, vectoren bepalen die loodrecht staan op de normaalvector.

De normaalvector is handig bij het berekenen van de afstand van een punt tot een vlak.

Stel, je wilt de afstand berekenen van punt O tot vlak $MCDN$. Dit is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk van punt O tot aan het vlak.

Eerst stel je een vectorvoorstelling op van lijn l door O loodrecht op het vlak:

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Voor de richtingsvector gebruik je een normaalvector van het vlak.

Bepaal vervolgens het snijpunt S van lijn l met het vlak.

Je vindt $S\left(\frac{6}{19}, \frac{18}{19}, \frac{18}{19}\right)$.

De afstand van O tot vlak $MCDN$ is $|OS| = \frac{6}{19}\sqrt{19} \approx 1{,}38$.

Opgave 3

Bestudeer **Uitleg 2**.

a Controleer dat de normaalvector $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ inderdaad loodrecht staat op beide richtingsvectoren.

Andersom kun je de normaalvector van het vlak ook rechtstreeks uit de richtingsvectoren afleiden. Bekijk de vectorvoorstelling van vlak $MCDN$ nogmaals.

De richtingsvectoren zijn $\overrightarrow{DN} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Neem aan dat de normaalvector van het vlak $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ is. Deze normaalvector moet loodrecht staan op elk van de twee richtingsvectoren, dus hun inproduct moet 0 zijn.

b Welke twee vergelijkingen in a, b en c levert dit op? Controleer dat $a = 1$, $b = 3$ en $c = 3$ hier inderdaad aan voldoen.

c Stel nu zelf een vergelijking van het vlak $MCDN$ op.

d Maak op bovenstaande manier ook een vergelijking van vlak EFC.

Opgave 4

In **Uitleg 2** staat dat je met behulp van de normaalvector de afstand kunnen berekenen van het punt O tot het vlak $MCDN$ door de lijn l door O en loodrecht op het vlak te snijden met het vlak $MCDN$.

a Stel een vectorvoorstelling op van lijn l.

b Bereken het snijpunt S van lijn l met vlak $MCDN$.

c Reken na dat $\text{d}(O,MCDN) \approx 1{,}38$.

d Bereken in twee decimalen de afstand van punt B naar het vlak $MCDN$.

Opgave 5

Een normaalvector van een vlak kun je berekenen door gebruik te maken van het uitwendig product van beide richtingsvectoren. Het uitwendig product (of uitproduct) van twee vectoren stelt je in staat om snel een normaalvector van een vlak te berekenen.

Het uitproduct van twee vectoren $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ en $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ is $\vec{a} \times \vec{b}=\begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$.

Met behulp van het inproduct kun je nagaan dat de vector $\vec{a} \times \vec{b}$ loodrecht op zowel $\vec{a}$ als $\vec{b}$ staat. Het uitproduct is dus een normaalvector van twee gegeven vectoren. Zo kun je het uitproduct van twee richtingsvectoren gebruiken om de normaalvector van een vlak te vinden.

a Laat met behulp van het inproduct zien, dat het uitproduct $\vec{a} \times \vec{b}$ van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ een vector is die inderdaad loodrecht op zowel $\vec{a}$ als $\vec{b}$ staat.

b Vlak V gaat door de punten $P(3,4,8)$, $Q(6,1,5)$ en $R(1,5,4)$. Stel met behulp van het uitproduct een vergelijking van dit vlak op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

In $\mathbb{R}^3$ heeft

- elke **lijn** een **vectorvoorstelling** van de vorm $\vec{x}=\vec{p}+t \cdot \vec{r}$;
- elk **vlak** een **vectorvoorstelling** van de vorm $\vec{x}=\vec{p}+u \cdot \vec{r_1}+v \cdot \vec{r_2}$.

Hierin is telkens $\vec{p}$ een **plaatsvector** (of **steunvector**) en zijn $\vec{r}$, $\vec{r_1}$ en $\vec{r_2}$ **richtingsvectoren**.

Met de vector $\vec{x}$ wordt een vector vanuit O naar een willekeurig punt $P(x,y,z)$ op de lijn of in het vlak bedoeld. Een lijn wordt bepaald door twee punten, een vector tussen beide punten is een mogelijke richtingsvector. Een vlak wordt bepaald door drie punten (als die niet op één lijn liggen); twee vectoren vanuit één van die punten naar de beide andere punten zijn mogelijke richtingsvectoren.
Elk vlak in $\mathbb{R}^3$ heeft ook een vergelijking van de vorm $ax + by + cz = d$.

De **normaalvector** van dit vlak is $\vec{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Deze vector staat loodrecht op het vlak en dus op beide richtingsvectoren van het vlak.
De normaalvector is handig bij het berekenen van afstanden.

Een normaalvector van een vlak kun je berekenen met het **uitproduct** van beide richtingsvectoren.

Het uitproduct van de vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ is $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$.

Deze vector $\vec{a} \times \vec{b}$ staat loodrecht op zowel $\vec{a}$ als $\vec{b}$ en is daarom de normaalvector van het vlak waar $\vec{a}$ en $\vec{b}$ de richtingsvectoren zijn.

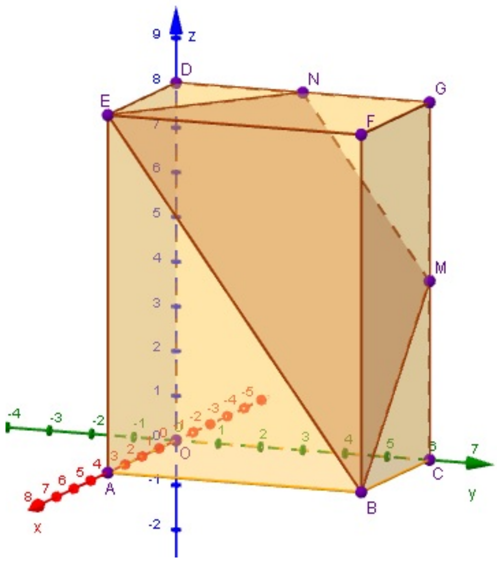
Voorbeeld 1

Je ziet hier een balk $OABC.DEFH$ met $A(4,0,0)$, $C(0,6,0)$ en $D(0,0,8)$.
Verder is $M(0,6,4)$ en $N(0,3,8)$.
Stel een vectorvoorstelling op van vlak $ENMB$.

Antwoord

Een vectorvoorstelling van een vlak bestaat uit een steunvector en twee richtingsvectoren (die niet evenwijdig lopen).
Elk punt P van vlak $ENMB$ is bijvoorbeeld te schrijven als: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OE} + p \cdot \overrightarrow{EB} + q \cdot \overrightarrow{EN}$.

Dus vlak $ENMB$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.



Figuur 5 Zie figuurapplet.

Opgave 6

Bekijk Voorbeeld 1.

a Stel een vectorvoorstelling op van vlak ANF.

b Beschrijf het vlak met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Opgave 7

Gegeven is het vlak met vergelijking $W: -2x + 4y - 3z = 5$.
Geef een vectorvoorstelling van vlak W.

Opgave 8

Gegeven zijn de punten $A(-1,3,5)$, $B(2,-6,2)$, $C(-5,15,1)$ en $D(0,2,-2)$.

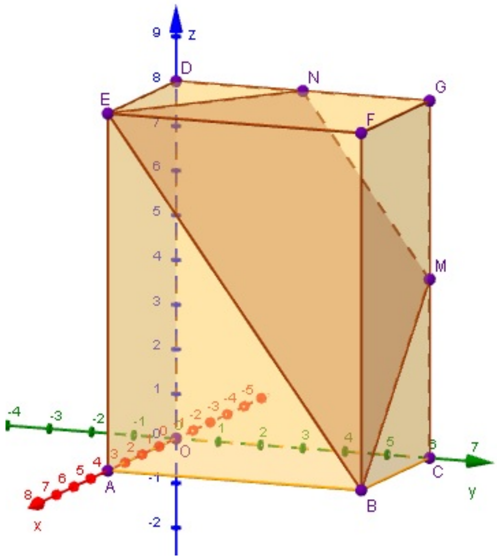
a Waarom bestaat er geen vlak door de punten A, B en C?

b Stel een vectorvoorstelling en een vergelijking op van het vlak V door de punten A, B en D.

Voorbeeld 2

Je ziet hier weer de balk OABC.DEFH $OABC.DEFH$ met $A(4,0,0)$, $C(0,6,0)$ en $D(0,0,8)$.
Verder is $M(0,6,4)$ en $N(0,3,8)$.

Stel een vergelijking op van vlak $ENMB$ en laat zien dat het snijpunt S van de lijnen EM en BN in vlak $ENMB$ ligt.



Figuur 6 **Zie figuurapplet.**

Antwoord

Een vectorvoorstelling van $ENMB$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Een normaalvector $\vec{n}$ van vlak $ENMB$ bepaal je met behulp van het uitproduct van $\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ en $\vec{r_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\vec{r_1} \times \vec{r_2} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 - -4 \cdot 3 \\ -4 \cdot -4 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 3 - 3 \cdot -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Je neemt $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Door ook nog het punt (4,0,8) in te vullen, vind je de vergelijking van het vlak, namelijk:
$ENMB$: $3x + 4y + 3z = 36$

Voor het snijpunt S van de lijnen EM en BN stel je de vectorvoorstellingen van

EM: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ en BN: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ aan elkaar gelijk.

Dit geeft snijpunt $S\left(\frac{4}{3}, 4, \frac{16}{3}\right)$.
Dit punt S voldoet aan de vergelijking van vlak $ENMB$ en ligt dus in het vlak.

Opgave 9

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je het snijpunt van twee lijnen kunt berekenen en dan controleren dat dit snijpunt inderdaad in het vlak ligt dat door beide lijnen gaat.

a Stel de vectorvoorstellingen van de lijnen EM en BN aan elkaar gelijk en laat zien dat $S\left(\frac{4}{3}, 4, \frac{16}{3}\right)$ inderdaad het snijpunt is van EM en BN.

b Vul de coördinaten van S in de vergelijking van V in en laat zien dat het klopt.

c In welk punt snijdt het vlak $ENMB$ de lijn FG?

Opgave 10

Gegeven is het vlak V : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a Stel een vergelijking op van vlak V.

b Laat zien dat het snijpunt S van lijn l : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ en lijn m : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ in vlak V ligt.

c Bereken de waarde van p als gegeven is dat punt $P\left(2,p,\frac{1}{2}\right)$ in vlak V ligt.

Opgave 11

Gegeven zijn de punten $A(3,0,1)$, $B(0,5,0)$ en $C(0,2,6)$.
Omdat de punten veel "nullen" bevatten, is er nog andere (handigere) manier om een vergelijking van een vlak V door de punten A, B en C op te stellen.

a Hoe luidt de algemene vergelijking van een vlak?

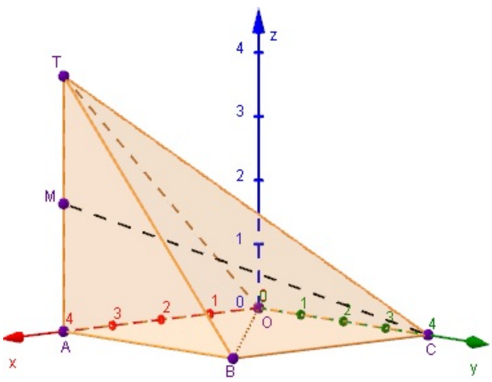
b Vul de coördinaten van de punten A, B en C in de algemene vergelijking van een vlak in.
Je krijgt drie vergelijkingen met vier onbekenden.

c Door nu slim één waarde te kiezen, liggen de andere drie waarden vast. Doe dit.
Geef ook een vergelijking van vlak V en controleer of de punten A, B en C inderdaad in vlak V liggen.

d Stel nu op dezelfde manier een vergelijking op van een vlak door de punten $A(-2,0,3)$, $B(0,4,0)$ en $C(6,1,0)$.

Voorbeeld 3

Gegeven is piramide $T.OABC$ met $A(4,0,0)$, $B(4,4,0)$, $C(0,4,0)$ en $T(4,0,4)$.
M is het midden van AT.
Bereken de coördinaten van het snijpunt van lijn CM en vlak OBT.



Figuur 7 Zie figuurapplet.

Antwoord

Ga na dat

$$CM: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$OBT: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Met behulp van het uitproduct van beide richtingsvectoren vind je een normaalvector van vlak OBT.
Een vergelijking van OBT is $x - y - z = 0$.

Het punt $(4t, 4 - 4t, 2t)$ is een willekeurig punt van lijn CM.
Dit punt ligt in vlak OBT als het voldoet aan de vergelijking $x - y - z = 0$.

Dit betekent: $4t - (4 - 4t) - 2t = 0$. Je vindt: $t = \frac{2}{3}$.

Het snijpunt van CM en OBT is: $S\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Opgave 12

In **Voorbeeld 3** wordt het snijpunt van lijn CM en een vlak OBT berekend.

a Laat zien hoe je van vlak OBT een vergelijking op stelt en bereken daarmee zelf dit snijpunt.

b Je kunt dit snijpunt ook berekenen zonder een vergelijking van vlak OBT te maken. Je kunt namelijk gewoon met beide vectorvoorstellingen werken.
Bereken ook op deze manier de coördinaten van het snijpunt.

c Bereken het snijpunt S van lijn OM en vlak BCT.

d Geef een voorbeeld van een lijn die vlak BCT niet snijdt. Toon door berekening aan dat die lijn het vlak inderdaad niet snijdt.

Opgave 13

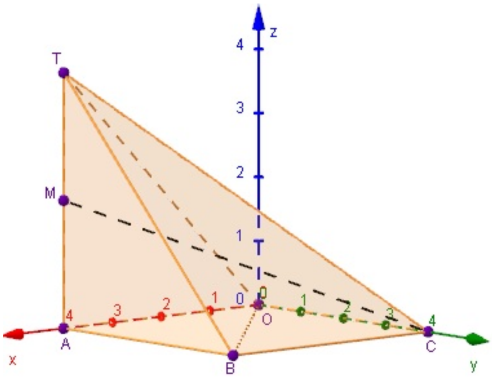
Gegeven is de lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en het vlak $V: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

a Bereken de coördinaten van het snijpunt S van lijn l en vlak V door de vectorvoorstellingen aan elkaar gelijk te stellen.

b Bereken de coördinaten van het snijpunt S van lijn l en vlak V door gebruik te maken van een vergelijking van vlak V.

Voorbeeld 4

Gegeven is weer piramide $T.OABC$ met $A(4,0,0)$, $B(4,4,0)$, $C(0,4,0)$ en $T(4,0,4)$.
M is het midden van AT.
Bereken de afstand van A tot vlak OBT, ofwel $\text{d}(A,OBT)$.



Figuur 8 **Zie figuurapplet.**

Antwoord

De vergelijking van vlak OBT is in **Voorbeeld 3** gevonden: $x - y - z = 0$.
Een loodlijn door A op dit vlak heeft daarom de vectorvoorstelling:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Snijd deze loodlijn met vlak OBT om het punt in vlak OBT te vinden dat het dichtst bij A ligt.

Een punt $(4+p, -p, -p)$ van deze loodlijn ligt in OBT als $4 + p - (-p) - (-p) = 0$, dus als $p = -\frac{4}{3}$.

Dit geeft het snijpunt $S\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ van de loodlijn door A met vlak OBT.

De lengte van $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ is nu de gevraagde afstand.

Dus $\text{d}(A,OBT) = \left|\overrightarrow{AS}\right| = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{48}{9}} = \frac{4}{3}\sqrt{3} \approx 2{,}31$.

Opgave 14

In **Voorbeeld 4** zie je hoe je de afstand van een punt tot een vlak kunt berekenen.
Bereken exact de afstand van punt T tot vlak BCM.

Opgave 15

Bekijk nogmaals **Voorbeeld 4**. Je wilt de afstand berekenen van lijn AB tot vlak OCT.

a Waarom loopt de lijn AB evenwijdig met vlak OCT?

b De afstand van een lijn en een vlak die evenwijdig aan elkaar lopen, bereken je door een willekeurig punt te nemen van die lijn en de afstand te berekenen tot het vlak.
Bereken op deze manier exact de afstand van lijn AB tot het vlak OCT.

Verwerken

Opgave 16

Gegeven is de balk $OABC.DEFG$ met $A(6,0,0)$, $C(0,4,0)$ en $D(0,0,4)$.
Punt P is het midden van AE en punt Q is het midden van DG.

a Stel een vectorvoorstelling van lijn PQ op.

b Stel een vectorvoorstelling van vlak ACD op

c Stel een vergelijking van vlak ACD op.

d Toon aan dat lijn PQ evenwijdig is met vlak ACD.

e Bereken de afstand van punt F tot vlak ACD in twee decimalen nauwkeurig.

f Onderzoek of de lijnen PQ en BG elkaar snijden.

Opgave 17

a Gegeven is vlak V met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Stel een vergelijking van vlak V op.

b Gegeven is vlak W met vergelijking $2x + 4y - z = 10$.

Stel een vectorvoorstelling van vlak W op.

Opgave 18

Gegeven is de kubus $OABC.DEFG$ met $A(4,0,0)$, $C(0,4,0)$ en $D(0,0,4)$.
Punt P is het midden van EF.
Het vlak V gaat door punt G en staat loodrecht op lijn OP.

a Stel een vergelijking op van vlak V.

b Stel een vectorvoorstelling op van vlak V.

c Bereken de snijpunten van vlak V met de ribben van de kubus.

d Je kunt nu vlak V in de kubus tekenen. Stel vectorvoorstellingen op van de snijlijnen van vlak V met de kubus.

e Bereken de snijpunten van vlak V met de drie coördinaatassen.

f Bereken de afstand van punt P tot vlak V.

Opgave 19

Hier wordt de positie van een punt P in de ruimte beschreven. Omdat de coördinaten van P nog variabelen bevat, beschrijft het punt een lijn of een vlak. Bepaal in het geval P een lijn beschrijft een vectorvoorstelling van die lijn en bepaal in het geval P een vlak beschrijft een vergelijking van dat vlak.

a $P = (1 + p + q, p + 2q, p)$

b $P = p(2,1,-3) + q(-4,-2,6)$

c $P = (1 - p + 3q, 4 - p + q, -1 + 2p - 4q)$

d $P = (1,0,1) + p(2,-3,4) + q(-1,0,0)$

e $P = (1 - p, 2 + p, 0)$

Opgave 20

Gegeven is de regelmatige vierzijdige piramide $T.OABC$ met $A(4,0,0)$, $C(0,4,0)$ en $T(2,2,6)$. Punt P is het midden van ribbe OT.

a Het vlak V door A, B en P snijdt ribbe CT in punt Q. Bereken de coördinaten van Q.

b Toon aan dat vierhoek $ABQP$ een trapezium is.

c Bereken exact oppervlakte van vierhoek $ABQP$.

d Bereken exact de afstand van T tot vlak $ABQP$.

Opgave 21

De punten $A(6,0,0)$, $B(0,6,0)$, $C(-6,0,0)$, $D(0,-6,0)$ en $T(0,0,6)$ bepalen een regelmatig vierzijdige piramide $T.ABCD$. Punt P is het midden van AT en punt Q ligt op BT zo, dat $|BQ| : |QT| = 1 : 2$.

a Welke coördinaten moet punt Q hebben? Licht je antwoord toe.

b Het vlak V door P, Q en D snijdt ribbe BC in punt R. Bereken de coördinaten van R.

c Bereken de afstand van punt O tot vlak V. Rond af op twee decimalen.

d S is het snijpunt van V met lijn AC. Bereken exact de lengte van lijnstuk PS.

Toepassen

Opgave 22: Afstandsformule punt tot vlak

Stel in een cartesisch $Oxyz$-assenstelsel een algemene formule op voor de afstand van punt O tot het vlak V gegeven door $ax + by + cz = d$.
Stel ook een algemene formule op van de afstand van $P(p_1, p_2, p_3)$ tot dit vlak V.

Opgave 23: Zwaartepunt driehoek

ΔABC is gegeven door $A(a,0,0), B(0,b,0)$ en $C(0,0,c)$.

a Geef de coördinaten van het zwaartepunt Z van deze driehoek.

b Bereken de afstand van O tot Z.

Testen

Opgave 24

De afgeknotte balk $OABC.DEFG$ wordt gegeven door $A(8,0,0)$, $B(8,6,0)$, $C(0,6,0)$, $D(0,0,10)$, $E(8,0,8)$ en $G(0,6,6)$.

a Bereken het snijpunt S van de lijnen EG en DF.

b Stel een vergelijking op van het bovenvlak $DEFG$.

c Bereken de coördinaten van het snijpunt van vlak $DEFG$ met lijn OB.

Het vlak $DEFG$ en het Oxy-vlak hebben een lijn gemeenschappelijk die de x-as in P en de y-as in Q snijdt.

d Bereken de lengte van PQ.

e Bereken de afstand van punt A tot vlak $DEFG$.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@xs4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.