2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Krommen in 2D** doorgewerkt. Je hebt geleerd dat naast de synthetische aanpak van bewijzen in de meetkunde, ook de analytische aanpak vaak mogelijk is. En het voordeel van die aanpak is dat je vaak al snel een mogelijkheid hebt om te beginnen. Verder heb je de kegelsneden parabool, ellips en hyperbool geconstrueerd en gerekend met de bijbehorende vergelijkingen Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

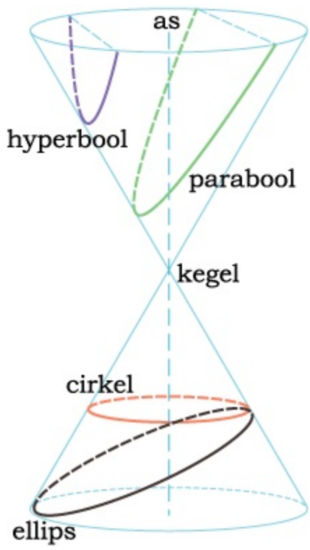
- synthetische aanpak — analytische aanpak
- parabool — brandpunt en richtlijn — vergelijking van een parabool — raaklijn aan een parabool
- ellips — brandpunten en richtcirkel — vergelijking van een ellips — raaklijn aan een ellips — lijn- en puntsymmetrie
- hyperbool — brandpunten en richtcirkel — vergelijking van een hyperbool — raaklijn aan een hyperbool — lijn- en puntsymmetrie
- hoek tussen twee lijnen — hoek tussen een lijn en een vlakke kromme en tussen twee krommen

Activiteitenlijst

- bewijzen leveren met een synthetische en/of een analytische aanpak
- parabolen construeren — een vergelijking van een parabool opstellen — uit een vergelijking van een parabool brandpunt en richtlijn afleiden — van een raaklijn aan een parabool de vergelijking opstellen
- ellipsen construeren — een vergelijking van een ellips opstellen — uit een vergelijking van een ellips brandpunt en richtlijn afleiden — van een raaklijn aan een ellips de vergelijking opstellen
- hyperbolen construeren — een vergelijking van een hyperbool opstellen — uit een vergelijking van een hyperbool brandpunt en richtlijn afleiden — van een raaklijn aan een hyperbool de vergelijking opstellen
- hoek tussen twee lijnen berekenen — hoek tussen een lijn en een vlakke kromme en tussen twee krommen berekenen

Achtergronden

Apollonius van Perga (262—190 v.Chr.) was een Grieks wiskundige, die bekend stond als 'de grote geometer', de grote meetkundige. Vooral zijn boek 'Kegelsneden' waarin de begrippen parabool, hyperbool en ellips werden geïntroduceerd, is heel erg beroemd geworden. Hij beschreef er de cirkel, de ellips, de parabool en de hyperbool in als doorsnijdingen van een vlak met een (dubbele) kegel en leidde de belangrijkste eigenschappen van deze vlakke krommen af. Later paste hij deze kennis toe op de bewegingen van hemellichamen.
Dit geschrift bestond uit acht boeken, waarvan alleen de eerste vier in het Grieks en de eerste zeven in het Arabisch zijn blijven bestaan.
In de eerste vier boeken vormen een elementaire inleiding in de basiseigenschappen van de kegelsneden. Dit werk was meestal afkomstig van werk van Euklides, Aristeus en Menaechmus. Maar sommige delen zijn verder uitgewerkt. Het gaat daar over eigenschappen van raaklijnen, brandpunten, middellijnen en over de wijze van constructie van deze krommen.
De boeken V t/m VII zijn door Apollonius geheel zelf bedacht. In boek V gaat het over normalen (dat zijn loodlijnen op raaklijnen in het raakpunt) van kegelsneden getrokken vanuit bepaalde punten.



Figuur 1

Testen

Opgave 1

Gegeven zijn de lijnen $l : y = a_1 \cdot x$ en $m : y = a_2 \cdot x$, waarbij a_1 en a_2 de richtingscoëfficiënten van de lijnen zijn.

a De lijn $x = 1$ snijdt lijn l in punt A en lijn m in punt B. Wat zijn de coördinaten van A en B?

b Stel dat de lijnen loodrecht op elkaar staan. Toon met behulp van de stelling van Pythagoras aan dat $a_1 \cdot a_2 = -1$.

c Stel nu dat $a_1 \cdot a_2 = -1$. Toon met behulp van de omgekeerde stelling van Pythagoras aan dat de lijnen l en m loodrecht op elkaar staan.

Opgave 2

Gegeven is een gelijkzijdige driehoek met zijden $2a$. Je wilt de straal van de omgeschreven cirkel van deze driehoek in a uitdrukken.

a Doe dit met behulp van analytische meetkunde.

b Doe dit met behulp van een synthetische aanpak.

Opgave 3

Gegeven is de lijn r: $x = 4$ en het punt $F(8,0)$.

a Toon aan dat de vergelijking van de parabool met r als richtlijn en F als brandpunt de vergelijking $y^2 = 8x - 48$ heeft.

b Stel vergelijkingen op van de raaklijnen aan deze parabool voor $x = 14$.

Door de top T van deze parabool en de raakpunten die je in b hebt gevonden gaat een cirkel c.

c Bereken de hoeken die c met de parabool maakt in graden nauwkeurig.

Opgave 4

Gegeven is de ellips e met vergelijking $9x^2 + 25y^2 = 225$.

a Bereken beide brandpunten en de straal van de richtcirkel.

b Stel vergelijkingen op van de twee lijnen die deze ellips raken in punten met een x-waarde van 3.

c Door de twee snijpunten van deze ellips met de x-as en door het punt $T(0,3)$ gaat een parabool p die de ellips in T raakt. Stel een vergelijking van p op.

d Toon aan dat p de ellips raakt in T.

Opgave 5

Gegeven is de hyperbool h met richtcirkel c: $x^2 + y^2 = 4$ en brandpunten $O(0,0)$ en $F(4,0)$.

a Stel een vergelijking op van deze hyperbool h.

b Deze hyperbool heeft twee takken, waarvan er één de cirkel c snijdt. Bereken de hoek waaronder dit gebeurt in graden nauwkeurig.

c Bewijs dat h symmetrisch is ten opzichte van het punt $C(2,0)$.

Toepassen

Opgave 6: De lemniscaat

Bekijk de applet

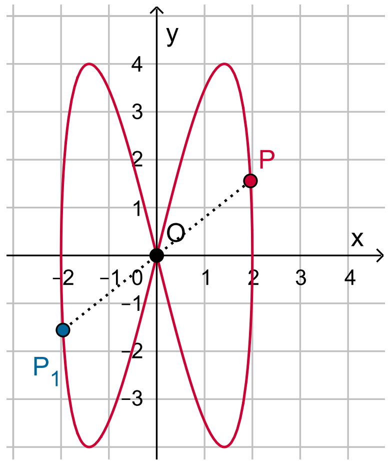
Hiernaast zie je een kromme k die ‘lemniscaat’ heet.
Hij heeft de vergelijking $y^2 = 4x^2(4 - x^2)$.

a Bewijs dat de lemniscaat symmetrisch is t.o.v. de x-as.

b Bereken de coördinaten van de punten op de lemniscaat waarin de raaklijn evenwijdig is aan de x-as.

c Bereken de hellingsgetallen van de twee raaklijnen in $(0,0)$ aan de lemniscaat. Welke hoek maken deze twee raaklijnen met elkaar?

d De lemniscaat snijdt van de lijn $y = px$ twee lijnstukken af met een lengte van $\sqrt{15}$.
Bereken p.



Figuur 2