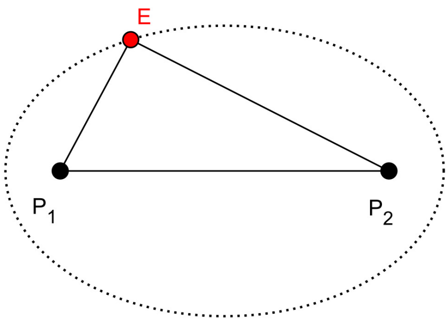
2.3 Ellipsen

Inleiding

De technieken die je bij lijnen, cirkels en parabolen hebt geleerd zijn ook bruikbaar bij andere vlakke krommen. Een voorbeeld daarvan is de ellips, een kromme die je maakt met twee spijkers en een touwtje met een vaste lengte.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- een ellips construeren vanuit de brandpunten en richtcirkel;
- een ellips beschrijven door middel van een vergelijking;
- vergelijkingen van raaklijnen aan een ellips opstellen.

Voorkennis

- werken met vergelijkingen van lijnen, cirkels en parabolen;
- vergelijkingen van raaklijnen aan cirkels en parabolen opstellen;
- snijpunten en afstanden berekenen.

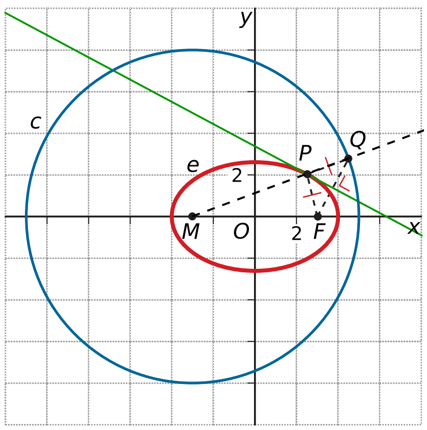
Verkennen

Opgave V1

Als punt Q over cirkel c beweegt doorloopt punt P een kromme. Die kromme heet een ellips als de straal van de cirkel groter is dan $|MF|$, anders een hyperbool.

a Welke eigenschap hebben alle punten P van de ellips?

b Hoe zou je een vergelijking van de ellips kunnen opstellen?



Figuur 2

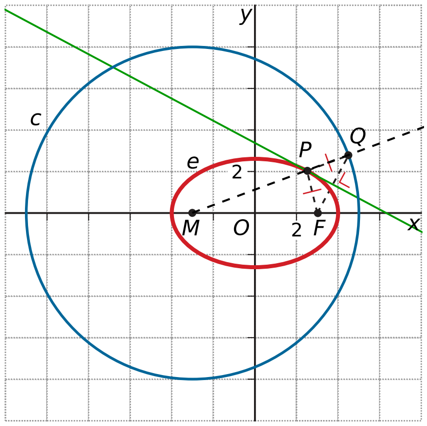
Uitleg 1

Bekijk de applet

Een ellips is een kromme die bestaat uit alle punten P die een even grote afstand hebben tot een vast punt F als tot een vaste cirkel c. Je construeert die punten door steeds de middelloodlijn van FQ te snijden met straal MQ. Dit vaste punt F heet het brandpunt (of focus), de vaste cirkel heet de richtcirkel. De ellips kun je alleen construeren als F binnen de cirkel ligt.

Voor de ellips in de figuur kun je afleiden dat voor elk punt $P(x,y)$ moet gelden $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$.

Je krijgt dezelfde ellips als de richtcirkel middelpunt $F(3,0)$ heeft en als $M(-3,0)$ het brandpunt is. De rol van de punten M en F is volledig verwisselbaar. Daarom zeg je wel dat zo'n ellips twee brandpunten heeft, namelijk M en F.



Figuur 3

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** hoe de ellips e wordt geconstrueerd door punt Q over de cirkel te bewegen. Uitgangspunt is dat steeds $|FP|=|PQ|$.

a Leg uit waarom dit betekent dat $|MP|+|PF|=8$.

b Neem nu $P(x,y)$ als punt van de ellips. Welke vergelijking in x en y volgt nu uit $|MP|+|PF|=8$?

c Leid de vergelijking van de ellips in **Uitleg 1** af.

d Het getal 16 kun je afleiden uit de richtcirkel door het kwadraat van de halve straal te nemen. Toon dit aan.

e Het getal 7 kan worden afgeleid uit het kwadraat van de halve straal van de richtcirkel en het kwadraat van de afstand van F tot de oorsprong $O(0,0)$, het centrum van de ellips. Toon dit aan.

f De ellips heeft een horizontale as die even lang is als de straal van de richtcirkel. Hoe lang is de verticale as?

Opgave 2

Bekijk de ellips uit **Uitleg 1**.

a Bewijs dat uit het feit dat punt P het snijpunt van de middelloodlijn van FQ en straal MQ is, volgt dat $\text{d}(P,c)=|PF|$.

b Stel een vergelijking op van de raaklijn aan de ellips in het punt P met x-coördinaat 2 en een positieve y-coördinaat.

In de constructie in de uitleg lijkt het er op dat de middelloodlijn van FQ de ellips raakt.

c Probeer dit zelf te bewijzen. (Een indirect bewijs gaat het gemakkelijkst, een analytisch bewijs is veel rekenwerk.)

Het centrum van de ellips e is (0,0). Je verschuift de ellips tot het centrum (3,2) is. Er ontstaat een nieuwe ellips e_2.

d Stel een vergelijking op van e_2.

e Bereken van deze nieuwe ellips de exacte snijpunten met de coördinaatassen.

Bekijk nu de situatie waarin $M(0,-3)$ het middelpunt is van de richtcirkel met straal 8 en dat $F(0,3)$ het andere brandpunt is.

f Welke vergelijking heeft de ellips die de verzameling punten P voorstelt waarvoor $|FP|=\text{d}(P,c)$?

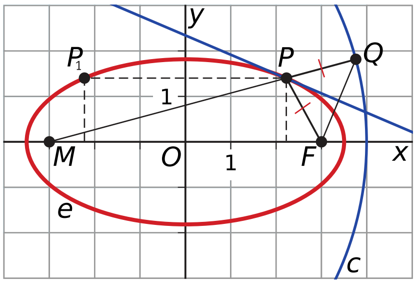
Uitleg 2

Bekijk de applet

Bekijk de ellips met vergelijking $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$.

De kromme lijkt symmetrisch ten opzichte van de x-as en ten opzichte van de y-as te zijn. Maar hoe toon je dit aan?

Als de ellips symmetrisch is ten opzichte van de y-as, dan betekent dit dat behalve $P(x,y)$ ook zijn spiegelbeeld $P_1(-x,y)$ op de kromme moet liggen. De redenering is zo:



Figuur 4

- $P(x,y)$ ligt op de kromme, dus voldoet aan de gegeven vergelijking van de ellips. Maar voldoet $P_1(-x,y)$ ook aan die vergelijking?
- Controleer dit door P_1 in te vullen: $\frac{(-x)^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$.

  Omdat $(-x)^2=x^2$ is dit hetzelfde als $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$.
- Hieruit volgt dat P_1 op de ellips ligt.

Conclusie: $P(x,y)$ en $P_1(-x,y)$ voldoen beide aan de gegeven vergelijking van de kromme en is symmetrisch ten opzichte van de y-as.

Opgave 3

In **Uitleg 2** wordt de symmetrie van een ellips ten opzichte van de y-as bewezen.

a Bewijs op dezelfde manier dat deze ellips symmetrisch is ten opzichte van de x-as.

b Bewijs op dezelfde manier dat deze ellips symmetrisch is ten opzichte van de oorsprong $O(0,0)$ van het assenstelsel.

Theorie en voorbeelden

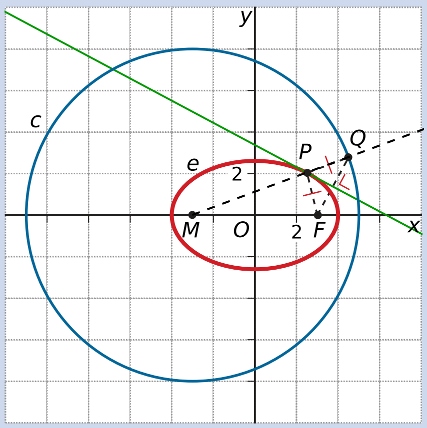
Om te onthouden

Een **ellips** is een kromme die bestaat uit punten P met gelijke afstand tot een punt F als tot een cirkel c. Dit punt F heet het **brandpunt** (of focus), de cirkel heet de **richtcirkel**. De ellips ontstaat als F binnen de cirkel ligt. Kies je de assen zo, dat $F=(p,0)$ en c middelpunt $M(-p,0)$ en straal r heeft, dan krijg je als vergelijking voor de ellips:

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$$

waarin $m=0{,}5r$ en $n^2=(0{,}5r)^2-p^2$.

m is de helft van de lengte van het lijnstuk dat de ellips afsnijdt van de symmetrieas door beide brandpunten en n is de helft van de lengte van het lijnstuk dat de ellips afsnijdt van de symmetrieas die daar loodrecht op staat. m is altijd groter dan n; zijn beide gelijk, dan vallen de brandpunten samen en heb je een cirkel. Als n groter is dan m, dan liggen de brandpunten op de y-as.



Figuur 5

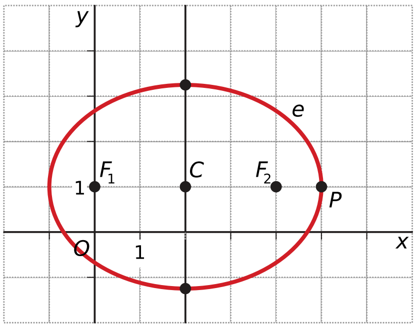
In de figuur is het brandpunt $F(3,0)$ en het middelpunt van de richtcirkel met straal 8 is $M(-3,0)$. De vergelijking van de ellips is:

$$e: \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$$

Je kunt ook het centrum C van de ellips van $(0{,}0)$ verschuiven naar $(a{,}b)$. In de vergelijking wordt x dan vervangen door $x - a$ en y door $y - b$. De ellips is symmetrisch ten opzichte van het centrum C.

Voorbeeld 1

Stel een vergelijking op van de ellips met brandpunten $F_1(0{,}1)$ en $F_2(4{,}1)$ die door $P(5{,}1)$ gaat en construeer deze ellips.



Figuur 6

Antwoord

Midden tussen beide brandpunten ligt het symmetriecentrum $C(2{,}1)$ van de ellips.
De ellips is de kromme van punten die even ver van F_2 als van de cirkel met middelpunt F_1 en straal r liggen. Nu is $r = |F_1P| + |F_2P| = 5 + 1 = 6$.
De brandpunten liggen op een afstand van $p = 2$ van het centrum $C(2{,}1)$.
De vergelijking van de ellips is:
$\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{3^2-2^2} = 1$ en dus $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1$.

Voor de constructie van de ellips teken je eerst de brandpunten en de richtcirkel met straal 6 en middelpunt F_1. Neem vervolgens een viertal punten Q op het eerste kwart van deze cirkel en construeer daarbij telkens het snijpunt P van straal F_1Q en de middelloodlijn van F_2Q. Je vindt zo vier punten P van de ellips. Met behulp van de symmetrie van de ellips kun je daar nog meer punten van de ellips bij maken. Teken vervolgens de ellips door de punten die je hebt gevonden.

Opgave 4

Bekijk de ellips uit **Voorbeeld 1**.

a Laat zien dat de richtcirkel (met middelpunt F_1) een straal van 6 moet hebben.

b Licht nu toe hoe je de vergelijking van de ellips kunt vinden.

c Construeer zelf deze ellips.

Opgave 5

Een ellips e heeft de brandpunten $O(0{,}0)$ en $F(8{,}0)$ en gaat door het punt $P(4{,}3)$.

a Stel een vergelijking van een mogelijke richtcirkel van deze ellips op.

b Stel een vergelijking van de ellips zelf op.

c In welke punten zijn de raaklijnen aan de ellips horizontaal of verticaal?

Voorbeeld 2

De brandpunten van de ellips met vergelijking $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y = 16$ liggen beide op een lijn evenwijdig aan de x-as. Bereken hun coördinaten. Stel ook een vergelijking op van de raaklijnen aan deze ellips voor $x = 0$.

Antwoord

Door kwadraat afsplitsen wordt de vergelijking $(x + 2)^2 + 4(y - 1)^2 = 24$.

Dit kun je schrijven als: $\frac{(x+2)^2}{24} + \frac{(y-1)^2}{6} = 1$.

Voor de straal r van de richtcirkel geldt $24 = (0{,}5r)^2$ en verder is $6 = (0{,}5r)^2 - p^2$, waarin p de afstand van een brandpunt tot het symmetriecentrum $(\text{-}2{,}1)$ van de ellips is. Nu kun je de brandpunten bepalen:
$F_1\left(\text{-}2 - \sqrt{18}{,}1\right)$ en $F_1\left(\text{-}2 + \sqrt{18}{,}1\right)$

Voor de vergelijkingen van de raaklijnen bepaal je eerst de raakpunten door $x = 0$ in de vergelijking in te voeren.

Ga na dat bij $x = 0$ hoort $y = 1 \pm \sqrt{5}$.

De ene raaklijn heeft dan een vergelijking van de vorm $y = ax + 1 + \sqrt{5}$ en voor de andere geldt $y = ax + 1 - \sqrt{5}$.

Nu kun je de vergelijkingen van beide raaklijnen opstellen met behulp van de discriminantmethode.

Raaklijn in $\left(0{,}1 - \sqrt{5}\right)$: $y = 0{,}1x\sqrt{5} + 1 - \sqrt{5}$.

Raaklijn in $\left(0{,}1 + \sqrt{5}\right)$: $y = -0{,}1x\sqrt{5} + 1 + \sqrt{5}$.

Opgave 6

Bekijk de ellips met de vergelijking $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y = 16$ uit **Voorbeeld 2**.

a Ga na dat je door kwadraat afsplitsen de vergelijking van de ellips zo kunt schrijven dat je het centrum ervan kunt aflezen.

b Bereken zelf de coördinaten van de brandpunten van deze ellips.

c Welk middelpunt heeft de richtcirkel? En hoe groot is de straal ervan?

Bestudeer de manier waarop de vergelijkingen van de raaklijnen aan de ellips voor een bepaalde waarde van x kunnen worden berekend.

d Stel met behulp van de discriminantmethode de vergelijkingen van beide raaklijnen in de punten $\left(0{,}1 - \sqrt{5}\right)$ en $\left(0{,}1 + \sqrt{5}\right)$ op.

e Stel een vergelijking op van beide raaklijnen aan de ellips voor $x = -4$.

f Onderzoek of er punten op de ellips zijn waarin de raaklijn een richtingscoëfficiënt van 1 heeft.

Opgave 7

Een ellips heeft twee horizontale raaklijnen met vergelijkingen $y = 1$ en $y = 5$ en twee verticale raaklijnen met vergelijkingen $x = -2$ en $x = 6$.

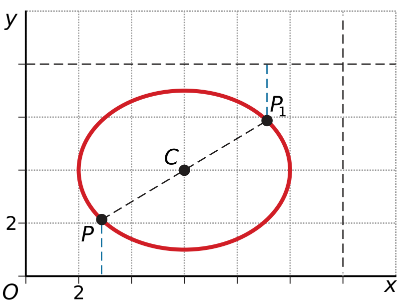
a Stel een vergelijking op van deze ellips.

b Deze ellips heeft twee raaklijnen die door $O(0,0)$ gaan. Stel daarvan vergelijkingen op. Rond de richtingscoëfficiënten af op drie decimalen.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

De ellips e met vergelijking $\frac{(x-6)^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$ is symmetrisch ten opzichte van het punt $C(6,4)$. Bewijs dit.



Figuur 7

Antwoord

Om dit te bewijzen is een aantal hulplijnen getekend. Daarmee zie je wat de symmetrie ten opzichte van punt C betekent. Voor elk punt $P(x,y)$ op de ellips moet ook het punt $P_1(12 - x, 8 - y)$ op de ellips liggen.

Dit punt moet ook voldoen aan de vergelijking van de ellips. Dat kun je controleren door de coördinaten ervan in te vullen in de vergelijking:

$\frac{(12-x-6)^2}{16} + \frac{(8-y-4)^2}{9} = 1$ geeft $\frac{(6-x)^2}{16} + \frac{(4-y)^2}{9} = 1$

Aangezien dit hetzelfde is als de gegeven vergelijking voldoet ook P_1 eraan. Dit punt ligt dus ook op de ellips.

Opgave 8

De ellips met vergelijking $\frac{(x-5)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$ is symmetrisch ten opzichte van de lijn $y=3$.

a Toon dit aan.

b Welke andere symmetrieas heeft de ellips? Bewijs ook die symmetrie.

Opgave 9

De ellips met vergelijking $\frac{(x+2)^2}{8}+\frac{(y-3)^2}{5}=1$ is symmetrisch ten opzichte van het punt $C(-2,3)$. Bewijs dit.

Verwerken

Opgave 10

Stel de vergelijking op van de ellips.

a e is een ellips met brandpunten $(-3,2)$ en $(5,2)$ die door het punt $(1,5)$ gaat.

b k is een ellips waarvan de richtcirkel de vergelijking $x^2+y^2=9$ heeft en het brandpunt $F(0,2)$ is.

Opgave 11

Gegeven zijn de ellips $x^2+4y^2=4x+8y-4$ en de parabool $(x-2)^2=4y$.

a Bereken van de ellips exact de coördinaten van de brandpunten.

b Bewijs de symmetrie van de ellips ten opzichte van het punt C dat midden tussen beide brandpunten ligt.

c Bereken algebraïsch de snijpunten van beide krommen.

Opgave 12

Een ellips heeft vergelijking $16x^2+y^2=32$.

a Leg uit waarom de brandpunten van deze ellips op de y-as moeten liggen.

b Bereken de exacte coördinaten van de brandpunten van deze ellips.

Deze ellips heeft twee raaklijnen die door het punt $(0,8)$ gaan.

c Stel vergelijkingen van deze raaklijnen op.

Opgave 13

De ellips e is gegeven door de vergelijking $\frac{(x-2)^2}{4}+y^2=1$. Er zijn twee raaklijnen door $(0,2)$ die e raken in de punten A en B.

a Stel de vergelijkingen op van de twee raaklijnen.

b Bereken de exacte lengte van lijnstuk AB.

Opgave 14

Elke ellips met symmetrieassen evenwijdig aan de coördinaatassen kan ontstaan uit de ellips met standaardvorm $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$.

a Noem een willekeurig punt op de ellips P. Gebruik $|F_1P|+|F_2P|=r$ en de uitdrukkingen voor m en n om aan te tonen dat de lengtes van de symmetrieassen $2m$ en $2n$ zijn.

b Punt $P(p,q)$ is een punt van deze ellips. Bewijs dat de lijn met vergelijking $\frac{p}{m^2}\cdot x+\frac{q}{n^2}\cdot y=1$ de raaklijn in P aan deze ellips is.

Toepassen

Opgave 15: Scheve ellips

Een ellips hoeft geen symmetrieassen te hebben die evenwijdig zijn aan de x-as of de y-as. Neem bijvoorbeeld een ellips die ontstaat uit de richtcirkel $c: x^2 + y^2 = 25$ en brandpunt $F(2,2)$.

a Construeer deze ellips.

b Noem Q een punt op de richtlijn en $P(x,y)$ het bijbehorende punt op de ellips.

Stel een vergelijking op van deze ellips.

c Bereken de coördinaten van de punten op p waarin de raaklijn evenwijdig loopt aan de x-as of de y-as.

Testen

Opgave 16

Een ellips e is gegeven door de vergelijking $x^2 + 8y^2 = 16$.

a Bereken de coördinaten van de brandpunten van e en stel een vergelijking op van een mogelijke richtcirkel van e.

b Er zijn twee raaklijnen aan de ellips die door het punt $(0,2)$ gaan. Stel de vergelijking van de lijn op die door de twee raakpunten van de raaklijnen aan de ellips gaat.

c In welke punten van e heeft de raaklijn een richtingscoëfficiënt van -2? Bereken de exacte coördinaten van die punten.

Opgave 17

Een ellips heeft de vergelijking $\frac{x^2}{5} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$. De richtcirkel van deze ellips heeft de vergelijking $x^2 + y^2 = 36$.

a Bepaal de brandpunten en construeer de ellips.

b Bewijs de symmetrie van deze ellips ten opzichte van het punt dat midden tussen brandpunt F en het middelpunt van de richtcirkel ligt.

c Er zijn twee lijnen met vergelijking $y = ax - 2$ die de ellips raken. Bereken de mogelijke waarden van a exact.

© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.