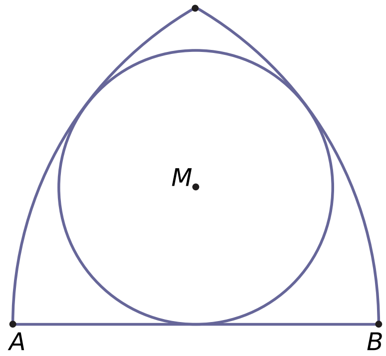
# 2.1 Meetkunde in 2D

## Inleiding

Een cirkel is een kromme lijn die bestaat uit alle punten die dezelfde afstand $r > 0$ hebben tot een gegeven middelpunt $M$. Hier zie je zo'n cirkel $c$ en nog twee delen van cirkels die de middelpunten $A$ en $B$ hebben en raken aan $c$, terwijl ook lijnstuk $AB$ raakt aan $c$. Als je weet hoe lang $AB$ is, kun je de straal van cirkel $c$ berekenen. Dat kun je doen door te werken met bekende meetkundige stellingen zoals de stelling van Pythagoras, maar je kunt ook de analytische meetkunde toepassen waarmee je bij wiskunde B kennis hebt gemaakt.




**Figuur 1**

**Je leert in dit onderwerp**

- berekeningen in de vlakke meetkunde uitvoeren ook met behulp van analytische en/of synthetische meetkunde;
- bewijzen met behulp van analytische en/of synthetische meetkunde.

**Voorkennis**

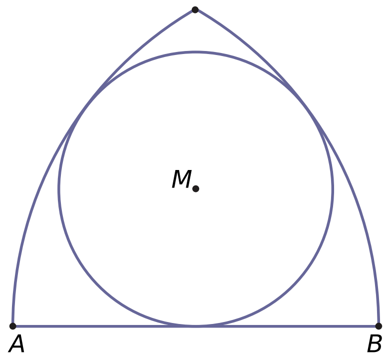
- bij vlakke meetkunde werken met assenstelsels en coördinaten, dus de beginselen van de analytische meetkunde;
- werken met vergelijkingen van cirkels en de discriminantmethode om raakpunten te berekenen.

## Verkennen

### Opgave V1

In deze figuur zie je een cirkel $c$ met middelpunt $M$. Lijnstuk $AB$ raakt deze cirkel. En er zijn twee cirkels met een straal van 8 cm die cirkel $c$ raken en middelpunten $A$ en $B$ hebben.

Bereken de straal van cirkel $c$.



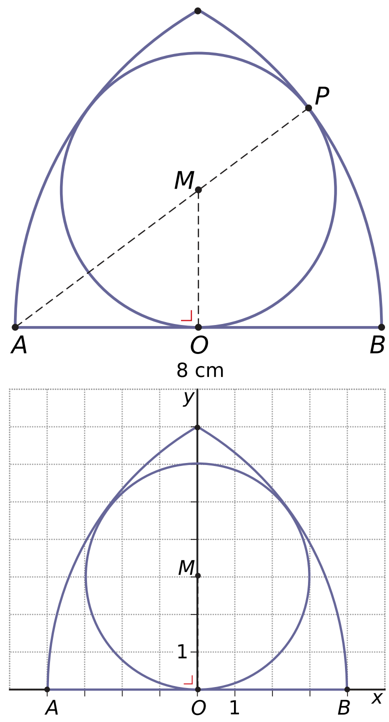

**Figuur 2**

## Uitleg

Bekijk de cirkel $c$ met middelpunt $M$. Lijnstuk $AB$ raakt deze cirkel. En er zijn twee cirkelbogen met een straal van 8 cm die cirkel $c$ raken en middelpunten $A$ en $B$ hebben.

Er zijn twee manieren om de straal van cirkel $c$ te berekenen:

- Lijn $AB$ raakt $c$ in punt $O$, dus $MO \perp AB$. De lijn door $A$ en $M$ snijdt cirkel $c$ in punt $P$ en dit is tegelijk het raakpunt van $c$ en de cirkelboog met middelpunt $A$ en straal 8.
  Omdat $|AP| = 8$ en $|MP| = r$ geldt $|AM| = 8 - r$.
  Ga na dat in de rechthoekige driehoek $AOM$ geldt: $|AO| = 4$ en $|OM| = r$. Met de stelling van Pythagoras in deze driehoek krijg je $4^2 + r^2 = (8 - r)^2$. Hieruit volgt $r = 3$ waarmee de vraag is beantwoord.
- Maak een assenstelsel met de $x$-as door $A$, $O$ en $B$ en de $y$-as door $O$ en $M$. Dan heb je de punten $A(-4,0)$, $B(4,0)$ en $M(0,r)$ met $r > 0$.
  Dan is $c : x^2 + (y - r)^2 = r^2$ en heeft de cirkel door $A$ met straal 8 de vergelijking $(x + 4)^2 + y^2 = 64$.
  Beide cirkels moeten precies één punt gemeen hebben. Bereken dit punt door in beide vergelijkingen de haakjes weg te werken en dan met behulp van de balansmethode alle kwadraten weg te laten vallen. Er blijft dan een lineair verband over in de vorm $x = ...$ of $y = ...$ dat je in een van beide cirkelvergelijkingen invult. Hieruit volgt een kwadratische vergelijking waarvan de discriminant gelijk moet zijn aan 0. Ook op deze manier volgt $r = 3$.




**Figuur 3**

Welke van beide manieren de beste is, hangt af van de situatie. Soms is het werken met eenvoudige meetkunde sneller en betekent het gebruik van analytische meetkunde omslachtig rekenwerk. Maar bij het toepassen van analytische meetkunde kun je in ieder geval altijd rekenen, ook als je niet meteen de aanpak ziet.

### Opgave 1

Bekijk de eerste manier die in de **Uitleg** gegeven wordt om de straal van de cirkel $c$ te berekenen.

**a** Leg uit waarom punt $P$ het raakpunt van beide cirkels is.

**b** Reken na dat $r = 3$.

Bekijk vervolgens de tweede manier.

**c** Laat zien dat uit de discriminantmethode ook blijkt dat $r = 3$.

### Opgave 2

In een vierkant $ABCD$ met zijden van 8 cm zit een cirkel $c_1$ die alle vier de zijden van het vierkant raakt. Er zijn vier kleinere cirkels die precies twee zijden van het vierkant raken en ook cirkel $c_1$ raken. $c_2$ is één van die vier cirkels.

**a** Maak een tekening van de situatie en teken een mogelijke cirkel $c_2$.

**b** Bereken exact de straal van $c_2$.

Dit probleem is ook op te lossen door een assenstelsel in te voeren. Kies bijvoorbeeld punt $A$ als oorsprong van het assenstelsel, de $x$-as langs lijnstuk $AB$ en de $y$-as langs lijnstuk $AD$. Teken daarin $c_2$ zo, dat deze cirkel raakt aan beide assen.

**c** Laat zien hoe je nu de straal van $c_2$ berekent met behulp van vergelijkingen van cirkels.

# Theorie en voorbeelden

## Om te onthouden

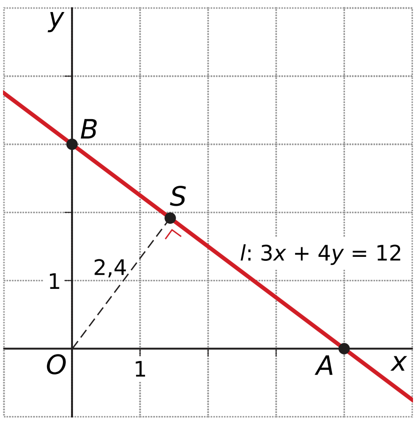
Veel meetkundige berekeningen en/of bewijzen kun je op twee manieren aanpakken:

- Een **synthetische aanpak**, waarbij je gebruikmaakt van al bekende technieken uit de vlakke meetkunde zoals de stelling van Pythagoras, gelijkvormigheid, congruentie en eigenschappen van bijzondere driehoeken en van cirkels. Veel daarvan ben je in het hoofdstuk 'Redeneren en bewijzen' tegengekomen.
- Een **analytische aanpak**, waarbij je gebruikmaakt van de analytische meetkunde die je bij wiskunde B hebt geleerd. Het gaat daarbij om het invoeren van een handig gekozen cartesisch assenstelsel en het werken met vergelijkingen van lijnen en cirkels en dergelijke.

## Voorbeeld 1

Geef een formule voor de afstand van punt $O(0,0)$ tot de lijn $l : ax + by = c$. Gebruik hiervoor zowel een synthetische als een analytische aanpak.

Controleer met deze formule dat de afstand van $O(0,0)$ tot de lijn $l : 3x + 4y = 12$ gelijk is aan 2,4.




Figuur 4

Antwoord

Eerst een synthetische aanpak:

- Bereken eerst de snijpunten van $l$ met de assen: $A\left(\frac{c}{a},0\right)$ en $B\left(0,\frac{c}{b}\right)$.
  Gebruik vervolgens de gelijkvormigheid van (bijvoorbeeld) de driehoeken $OAB$ en $SAO$. Bereken eerst $|AB| = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}}$.
  Leid uit de gelijkvormigheid vervolgens af dat de gevraagde afstand $|OS| = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ is.

Een analytische aanpak is:

- Bereken eerst de snijpunten van $l$ met de assen: $A\left(\frac{c}{a},0\right)$ en $B\left(0,\frac{c}{b}\right)$.
  Stel vervolgens een vergelijking op van de lijn door $O$ die loodrecht staat op $l$.
  Snijd deze lijn met lijn $l$ om de coördinaten van $S$ te vinden: $S\left(\frac{ac}{a^2+b^2},\frac{bc}{a^2+b^2}\right)$.
  Bereken tenslotte $|OS| = \sqrt{\frac{a^2c^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^2c^2}{(a^2+b^2)^2}}$. Dit is te herleiden tot $|OS| = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

De afstand van $O(0,0)$ tot de lijn $l : 3x + 4y = 12$ is $\frac{12}{\sqrt{3^2+4^2}} = 2{,}4$.

## Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1** en leid de afstand van de oorsprong tot lijn $l : ax + by = c$ af met behulp van de synthetische aanpak.

**a** Bereken de snijpunten $A$ en $B$ met de coördinaatassen en de lengte van lijnstuk $AB$.

**b** Gebruik de beschreven gelijkvormigheid om de afstand $|OS|$ van punt $O$ tot lijn $l$ te berekenen.

**c** Bereken in twee decimalen de afstand van $O$ tot de lijn $2x + 3y = 6$.

## Opgave 4

Bekijk weer **Voorbeeld 1**. Leid de afstand van de oorsprong tot lijn $l : ax + by = c$ af met behulp van de analytische aanpak.

**a** Stel de vergelijking op van de lijn $OS$.

**b** Toon aan dat $S\left(\frac{ac}{a^2+b^2},\frac{bc}{a^2+b^2}\right)$ en $|OS| = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

## Opgave 5

Leid met behulp van de formule in **Voorbeeld 1** een algemene formule af voor de afstand van een punt $P(p,q)$ tot een lijn $l : ax + by = c$. Pas een translatie toe van -$p$ ten opzichte van de $y$-as en een translatie van -$q$ ten opzichte van de $x$-as om het punt $P$ naar $O$ te verplaatsen.

**a** Wat wordt na die translatie de vergelijking van lijn $l$?

**b** Gebruik de algemene formule voor de afstand van $O$ tot lijn $l$ en bereken daarmee de afstand van $P$ tot $l$.

**c** Gebruik de bij b gevonden formule om de afstand van $P(4,5)$ tot lijn $l : 2x + 3y = 6$ uit te rekenen. Rond af op twee decimalen.

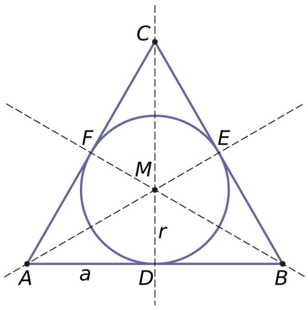
Je kunt de afstand van $P(4,5)$ tot lijn $l : 2x + 3y = 6$ ook berekenen door een loodlijn door $P$ op lijn $l$ te maken en het snijpunt $S$ van $l$ en die loodlijn uit te rekenen. $|PS|$ is dan de gevraagde afstand.

**d** Bereken de afstand op deze manier en vergelijk het antwoord met c.

## Voorbeeld 2

**Bekijk de applet**

In een gelijkzijdige driehoek met zijden die een lengte van $2a$ hebben, zit een cirkel $c$ die alle drie de zijden van deze driehoek raakt. Druk de straal van deze ingeschreven cirkel uit in $a$. Gebruik zowel een synthetische als een analytische aanpak.



**Figuur 5**

Antwoord

Een synthetische aanpak:

- Het middelpunt $M$ van de cirkel is het snijpunt van de bissectrices van de hoeken van driehoek $ABC$. Deze bissectrices zijn in een gelijkzijdige driehoek ook middelloodlijnen van de zijden. Dus zijn de punten $D$, $E$ en $F$ de middens van de zijden en staan $AE$, $CD$ en $BF$ loodrecht op die zijden.

  Uit de gelijkvormigheid van bijvoorbeeld $\Delta DBC$ en $\Delta EMC$ volgt $r = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$.

Een analytische aanpak:

- Het middelpunt $M$ van de cirkel is het snijpunt van bissectrices van de hoeken van driehoek $ABC$. Deze bissectrices zijn in een gelijkzijdige driehoek ook middelloodlijnen van de zijden. Dus zijn de punten $D$, $E$ en $F$ de middens van de zijden en staan $AE$, $CD$ en $BF$ loodrecht op die zijden. Kies een assenstelsel met (bijvoorbeeld) de oorsprong in $D$, lijn $AB$ als $x$-as en lijn $DC$ als $y$-as. Bepaal dan de coördinaten van de hoekpunten van $\Delta ABC$ en daarmee die van $E$ en $F$. Stel vervolgens de vergelijking van $AE$ op en bereken het snijpunt daarvan met de $y$-as, dat is punt $M$. Deze $y$-waarde is de straal van de cirkel.

De synthetische aanpak bespaart je wat rekenwerk, maar vraagt meer inzicht. Voor de analytische aanpak geldt het tegenovergestelde.

## Opgave 6

Bekijk de manier waarop in **Voorbeeld 2** de straal van de ingeschreven cirkel van een gelijkzijdige driehoek met zijden van $2a$ wordt berekend.

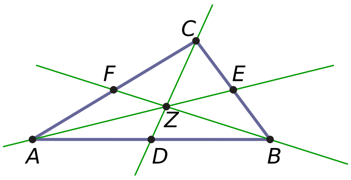
**a** Toon met behulp van de synthetische aanpak aan dat $r = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$.

**b** Toon met behulp van de analytische aanpak aan dat $r = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$.

## Voorbeeld 3

**Bekijk de applet**

De zwaartelijnen van elke driehoek verdelen elkaar in stukken waarvan de lengtes zich verhouden als 2 : 1.
Bewijs dit.




Figuur 6

Antwoord

**Gegeven**:
$AE$, $BF$ en $CD$ zijn zwaartelijnen, dus $BE = EC$, $AF = FC$ en $AD = DB$.

$Z$ is het snijpunt van $AE$ en $BF$.

**Te bewijzen**:
$|AZ| : |ZE| = |BZ| : |ZF| = |CZ| : |ZD| = 2 : 1$.

**Bewijs**:
Volgens de synthetische aanpak:
$|CA| = 2 \cdot |CF|$ en $|CB| = 2 \cdot |CE|$, dus $\Delta ABC$ is gelijkvormig met $\Delta FEC$ (zhz). Dit betekent: $|AB| = 2 \cdot |FE|$ en $AB // FE$. Hieruit volgt: $\angle BAE = \angle AEF$ en $\angle ABF = \angle BFE$ (Z-hoeken). En dus is $\Delta ABZ$ gelijkvormig met $\Delta EFZ$ (hh).
Omdat $|AB| = 2 \cdot |FE|$ is $|ZB| : |FZ| = 2 : 1 = |ZA| : |EZ|$. De zwaartelijnen $AE$ en $BF$ verdelen elkaar dus in de verhouding 2 : 1.
Eenzelfde redenering geldt voor bijvoorbeeld de zwaartelijnen $AE$ en $CD$. Hieruit volgt ook dat de zwaartelijnen door één punt gaan.
Q.e.d.

Volgens de analytische aanpak:

- Kies een assenstelsel waarvan de oorsprong in (bijvoorbeeld) $A$ zit en de $x$-as de lijn door $A$ en $B$ is.
- De hoekpunten hebben dan bijvoorbeeld de coördinaten $A(0,0)$, $B(2b,0)$ en $C(2a,2c)$.
- Bepaal hiermee de middens van de drie zijden: $D(b,0)$, $E(a+b,c)$ en $F(a,c)$.
- Stel vergelijkingen op van twee zwaartelijnen en bereken hun snijpunt (het zwaartepunt $Z$). Je vindt $Z\left(\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b, \frac{2}{3}c\right)$. Controleer dat dit zwaartepunt ook aan de vergelijking van de derde zwaartelijn voldoet.
- Bewijs de stelling door de verhouding van $|AZ|$ en $|ZE|$, van $|BZ|$ en $|ZF|$ en van $|CZ|$ en $|ZD|$ te bepalen. De verhoudingen zijn 2 : 1.

## Opgave 7

Bekijk het analytische bewijs in **Voorbeeld 3** dat de zwaartelijnen van elke driehoek elkaar in stukken verdelen waarvan de lengtes zich verhouden als 2 : 1.

**a** Toon aan dat $Z\left(\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b, \frac{2}{3}c\right)$.

**b** Toon aan dat $|AZ| : |ZE| = 2 : 1$.

## Verwerken

### Opgave 8

In vierkant $ABCD$ is een diagonaal getekend. De zijden van het vierkant zijn 4 cm. Cirkel $c$ raakt twee zijden van het vierkant en de diagonaal.

**a** Teken een mogelijke cirkel $c$. Hoeveel van die cirkels zijn er mogelijk?

**b** Bereken exact de straal van cirkel $c$. Gebruik hiervoor congruentie.

Maak een assenstelsel met de oorsprong in $A$, de $x$-as langs $AB$ en de $y$-as langs $AD$.

**c** Bereken nog eens de straal van cirkel $c$ maar nu met behulp van analytische meetkunde.

### Opgave 9

In driehoek $ABC$ is $D$ het midden van $BC$ en $E$ het midden van $AC$. Lijn $DE$ is een middenparallel in deze driehoek. Dit betekent dat $DE//AB$.

**a** Bewijs dit met behulp van gelijkvormigheid.

**b** Bewijs dit met behulp van analytische meetkunde.

### Opgave 10

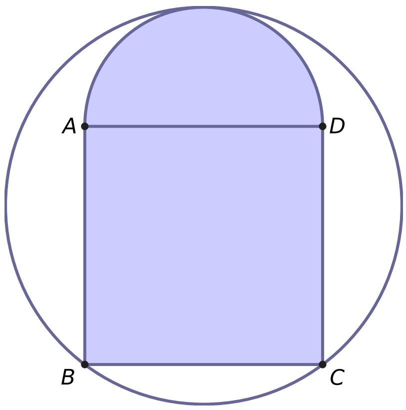
Gegeven is de lijn $l: y = -\frac{1}{2}x + p$ met $p > 0$. De lijn $m$ gaat door $O(0,0)$ en staat loodrecht op $l$. De lijnen $l$ en $m$ snijden elkaar in punt $S$. Verder is $\text{d}(O,S) = 2$. Bepaal de exacte waarde van $p$.

### Opgave 11

$ABCD$ is een vierkant met zijden van 2 cm. Lijnstuk $AD$ is de middellijn van een halve cirkel die aan de buitenkant van het vierkant is getekend. De omgeschreven cirkel van de figuur gaat door $B$ en $C$ en raakt de halve cirkel.

**a** Bereken exact de straal van de omgeschreven cirkel met behulp van vlakke meetkunde.

**b** Bereken exact de straal van de omgeschreven cirkel met behulp van analytische meetkunde.




Figuur 7

### Opgave 12

Een gelijkbenige driehoek heeft twee zijden van $2a$ centimeter en een zijde van $2b$ centimeter. De omgeschreven cirkel van deze driehoek gaat door de drie hoekpunten ervan.

**a** Druk de straal $r$ van de cirkel uit in $a$ en $b$ met behulp van een synthetische aanpak.

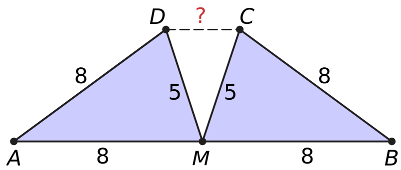
**b** Druk de straal $r$ van de cirkel uit in $a$ en $b$ met behulp van analytische meetkunde.

## Toepassen

### Opgave 13: $CD$ berekenen

Bekijk het lijnstuk $AB$ met midden $M$. De vier lijnstukken $AM$, $BM$, $BC$ en $AD$ hebben lengte 8 en de lijnstukken $DM$ en $CM$ hebben lengte 5.

Hoe lang is lijnstuk $CD$? Kies zelf een synthetische of een analytische aanpak.




Figuur 8

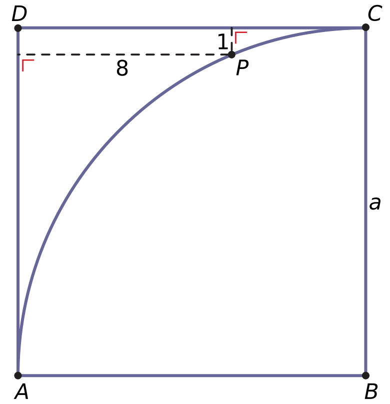
## Testen

### Opgave 14

Bekijk het vierkant $ABCD$ met een kwartcirkel met middelpunt in één van de hoekpunten. Op deze kwartcirkel ligt een punt $P$. Er geldt verder dat $\text{d}(P,AD) = 8$ en $\text{d}(P,DC) = 1$.

**a** Bereken de lengte van de zijde van het vierkant door gebruik te maken van een synthetische aanpak.

**b** Bereken nu de lengte van de zijde van het vierkant door gebruik te maken van een analytische aanpak.




Figuur 9

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.