1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Redeneren en bewijzen** doorgewerkt. Je werkt bij redeneren en bewijzen in de vlakke meetkunde vanuit de **Lijst van definities en stellingen voor vlakke meetkunde**. Naar de stellingen en definities die daar op staan kun je verwijzen. De lijst bevat meer zaken dan in dit onderwerp aan de orde zijn geweest, omdat hij is gemaakt in een tijd dat er op dit gebied meer zaken binnen het wiskundeprogramma vielen.
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- definitie — vermoeden — axioma — bewijs (uit het ongerijmde)
- congruentie — congruentiekenmerken driehoeken — driehoeksongelijkheid
- gegeven, te bewijzen, bewijs als structuur van een bewijs — direct en indirect (uit het ongerijmde) bewijs
- gelijkvormigheid — gelijkvormigheidskenmerken van driehoeken
- hoogtelijn, zwaartelijn, bissectrice (deellijn), loodlijn, middelloodlijn, middenparallel (in driehoeken)

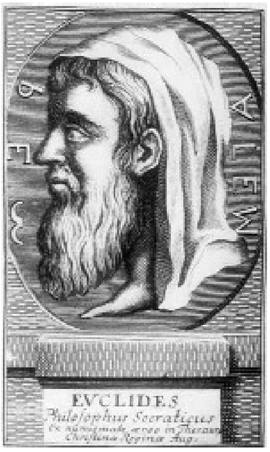
Activiteitenlijst

- eenvoudige bewijzen leveren vanuit basisdefinities en axioma's
- congruentiekenmerken van driehoeken gebruiken in bewijzen
- bewijzen leveren volgens een vaste structuur
- werken met gelijkvormige driehoeken in bewijzen
- de eigenschappen van bijzondere lijnen bewijzen

Achtergronden

De oorsprong van de meetkunde ligt in praktische problemen: begrippen als afstand, rechte lijn, hoek, omtrek, oppervlakte had men nodig bij landmeting, bij het bouwen (van piramides) en bij het begrijpen en voorspellen van de stand van planeten en sterren. De Griek **Euclides** (300 v.Chr.) bouwde voort op eerder werk van Thales en Pythagoras. Hij was de eerste die in zijn werk ‘De Elementen’ een systematische opbouw nastreefde.

- Hij legde de grondbegrippen vast in definities.
- Hij ging uit van een klein aantal aannames die hij proposities (of axioma's) noemde.
- Hij gebruikte enkele algemene inzichten.



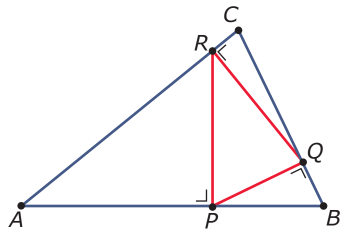
Figuur 1

Al deze beweringen dienden als fundament voor zijn meetkunde. Ze werden als vanzelfsprekend beschouwd.
Alle volgende beweringen (stellingen) moesten door een logische redenering (een bewijs) daaruit, of uit al eerder bewezen stellingen, worden afgeleid. Dat geeft de garantie dat je die stellingen kunt toepassen in elke praktijksituatie waarin het fundament geldt. Een bewijs van (bijvoorbeeld) de stelling van Pythagoras geeft je de zekerheid dat je die stelling kunt gebruiken bij elke rechthoekige driehoek.
Ook Babyloniërs en Egyptenaren kenden enige wiskunde, maar hun redeneringen gingen altijd over concrete voorbeelden ($3^2 + 4^2 = 5^2$). Het gebruik van variabelen ($a^2 + b^2 = c^2$) kenden zij niet.

Testen

Opgave 1

Bekijk de figuur.
Bewijs dat ΔPQR gelijkvormig is met ΔABC.



Figuur 2

Opgave 2

Gegeven is een driehoek ABC. Op AC wordt een gelijkzijdige driehoek ACD en op BC wordt een gelijkzijdige driehoek BCE gemaakt. $\angle ACD = \angle BCE$ en beide gelijkzijdige driehoeken overlappen driehoek ABC niet.

Bewijs dat $|BD| = |AE|$.

Opgave 3

l, m en n zijn drie evenwijdige lijnen met m tussen l en n. De lijn s staat loodrecht op l en snijdt l, m en n in respectievelijk A, B en C. $|AB| : |BC| = 1 : 3$. Je gaat bewijzen dat van elke lijn die de drie lijnen snijdt het stuk tussen l en n door m verdeeld wordt in stukken die zich verhouden als $1 : 3$.

a Bewijs eerst dat s ook m en n loodrecht snijdt.

b Bekijk een lijn t die ook loodrecht op l staat. Geef voor dat geval een bewijs. Gebruik rechthoeken, hulplijnen, congruentie en gelijkvormigheid.

c Neem nu een lijn die niet loodrecht op l staat. Geef voor dat geval een bewijs, gebruik hulplijnen.

Opgave 4

Ga uit van een rechthoekige driehoek ABC met $\angle A = 90°$. Op BC ligt punt D zo, dat $AD = AC$. Lijnstuk DE staat loodrecht op AD en punt E ligt op AB.

Bewijs dat $ED = EB$.

Opgave 5

Gegeven is een gelijkbenige driehoek ABC met $|AB| = |AC| = 8$ en $|BC| = 4$.

Bereken de straal van de ingeschreven cirkel (dat is de cirkel die alle zijden van de driehoek raakt).

Opgave 6

In ΔABC zijn AD, BE en CF de hoogtelijnen.

Bewijs dat deze hoogtelijnen bissectrices zijn in ΔDEF.

Toepassen

Opgave 7: Constructies met passer en liniaal

Constructies met passer en liniaal waren bij de Oude Grieken zeer geliefd. In feite vonden ze dat iets alleen kon bestaan als het met passer en liniaal kon worden geconstrueerd. En daardoor ontstonden belangrijke vraagstukken...

Een loodlijn van een punt P op een lijn l construeer je door eerst een cirkel met middelpunt P te maken, zo groot dat hij l in twee punten snijdt. Noem die punten A en B. Vervolgens maak je met middelpunt A en daarna met middelpunt B een even grote cirkel. Het snijpunt van die cirkels is S. En PS staat loodrecht op l.

a Bewijs dat PS loodrecht op l staat.

De middelloodlijn van lijnstuk AB construeer je door twee even grote cirkels met middelpunten A en B met elkaar te snijden. (De straal van deze cirkels moet groter zijn dan de helft van de lengte van lijnstuk AB). Als hun snijpunten P en Q zijn is lijn PQ de middelloodlijn van AB.

b Bewijs dat PQ de middelloodlijn van AB is.

Voor de constructie van de bissectrice van $\angle A$ met benen l en m, ga je als volgt te werk.
Open de passer een stukje en beschrijf een cirkel met middelpunt A. Die snijdt l en m, zeg in B respectievelijk C (je hoeft daarvoor niet de hele cirkel te tekenen). Zonder de stand van de passer te veranderen maak je nu een cirkel met middelpunt B en een met middelpunt C en bepaalt hun snijpunt D. Dan is AD de gezochte bissectrice.

c Bewijs dat AD een bissectrice is.

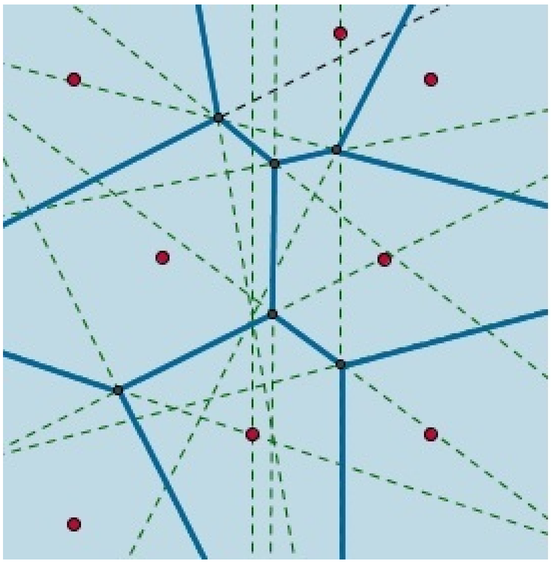
Opgave 8: Voronoi-diagrammen

Bij mobiele telefonie wordt contact gemaakt met de dichtstbij zijnde antenne die de telefoon herkent. Om elke antenne bestaat een gebied waarvan de punten juist tot deze antenne de kortste afstand hebben. De grenzen van deze gebieden zijn (stukken van) middelloodlijnen. Je spreekt wel van een **voronoidiagram**...

Hier zie je een hoe een voronoidiagram met 8 'antennes' (de rode punten) kan worden geconstrueerd. Volgens het **naaste-buur-principe** bestaat het gebied rond elke antenne uit punten waarvoor die antenne dichterbij is dan elke andere. De grenzen van die gebieden liggen telkens evenver van twee antennes af, het zijn daarom (delen van) de middelloodlijnen van lijnstukken tussen die twee antennes.

Voronoidiagrammen zijn bedacht door de Russische wiskundige (van Oekraïense afkomst) Georgy F. Voronoi (1868—1908). Meer lezen over voronoidiagrammen en hun toepassingen, of ze snel maken? Ga naar

- **Wikipedia: Voronoi-diagram**
- **Voronoi diagram Wolfram MathWorld**
- **Voronoi-applet**


Figuur 3

a Teken een voronoidiagram met 3 punten. In welke situatie gaan de drie grenslijnen niet door één punt?

b Je wilt een voronoidiagram maken met 4 punten. Hoeveel middelloodlijnen spelen er dan een rol?

c Teken drie voronoidiagrammen met 4 punten, bij één ervan gaan de grenslijnen door één punt, bij een andere lopen alle grenslijnen evenwijdig en bij de derde zijn de punten volstrekt willekeurig gekozen.

Opgave 9: De rechte van Euler

Teken je in een driehoek het snijpunt H van de hoogtelijnen, het snijpunt Z van de zwaartelijnen en het snijpunt M van de middelloodlijnen, dan blijken die drie punten op één rechte lijn te liggen, de zogenaamde rechte van Euler.

Bekijk de applet: Rechte van Euler.

Probeer een bewijs te vinden voor deze stelling. Zoek rustig op internet, maar formuleer het bewijs op je eigen manier en zo dat je het begrijpt.

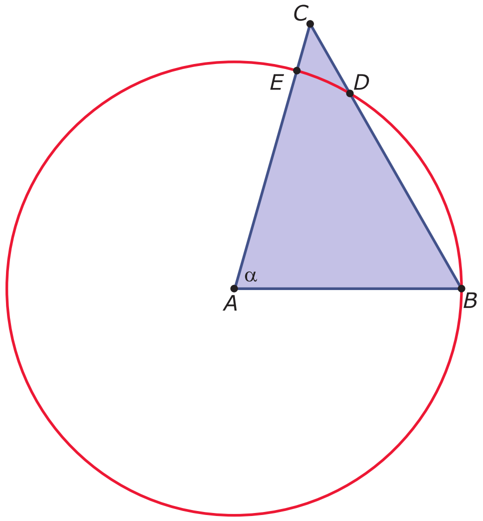
Examen

Opgave 10: Driehoek en cirkel

In de figuur hiernaast is een scherphoekige driehoek ABC getekend, met $AC > AB$, en de cirkel met middelpunt A en straal AB. Deze cirkel snijdt BC in D en AC in E. De grootte van $\angle BAC$ noemen we α.

Druk $\angle CDE$ uit in α. Bewijs dat je antwoord juist is.

(bron: examen wiskunde B vwo 2008, tweede tijdvak)



Figuur 4