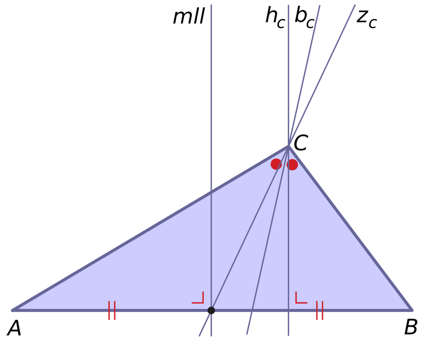
1.5 Bijzondere lijnen

Inleiding

Je ziet hier in een ΔABC de hoogtelijn uit C, de zwaartelijn uit C, de bissectrice (deellijn) van $\angle C$ en de middelloodlijn van AB. Verander je de driehoek, dan kunnen een aantal van deze lijnen gaan samenvallen. Verder kun je in elke driehoek drie van elk van die soorten lijn(stukk)en tekenen.
Welke eigenschappen hebben ze?



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de namen van enkele bijzondere lijnen;
- deze lijnen construeren, o.a. in driehoeken;
- eigenschappen van deze bijzondere lijnen (in driehoeken).

Voorkennis

- eenvoudige bewijzen leveren vanuit de lijst met definities/stellingen voor Vlakke Meetkunde.
- gebruik maken van congruentie en gelijkvormigheid van driehoeken.

Verkennen

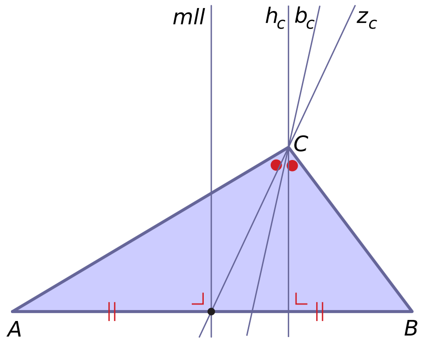
Opgave V1

Je ziet hier in een ΔABC de hoogtelijn uit C, de zwaartelijn uit C, de bissectrice (deellijn) van $\angle C$ en de middelloodlijn van AB. Verander je de driehoek, dan kunnen een aantal van deze lijnen gaan samenvallen. Verder kun je in elke driehoek drie van elk van die soorten lijn(stukk)en tekenen.

Bekijk de figuur hierboven nog eens.

a Bij welke soort driehoeken vallen de vier getekende lijnen samen?

b Kun je een driehoek maken waarbij alleen de bissectrice uit C en de hoogtelijn uit C samenvallen?

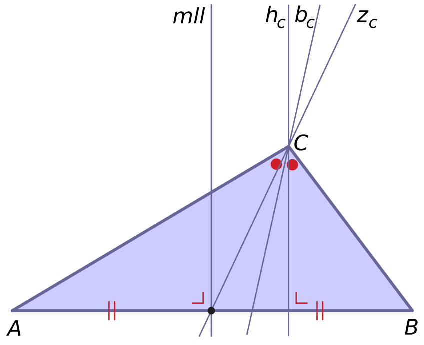


Figuur 2

Uitleg

Bekijk de applet: Bijzondere lijnen in een driehoek.

Je ziet in een ΔABC de hoogtelijn uit C, de zwaartelijn uit C, de bissectrice (deellijn) van $\angle C$ en de middelloodlijn van AB. Verander je de driehoek, dan kunnen een aantal van deze lijnen gaan samenvallen.
Allereerst moet goed worden vastgelegd wat je onder elk van deze lijnen verstaat. Er zijn nog meer bijzondere lijnen, bijvoorbeeld de middenparallel. De definitie hiervan staat beschreven in de theorie.



Figuur 3

Merk op dat de vier getekende lijnen alleen samenvallen als $AC = BC$, dus als ΔABC gelijkbenig is met tophoek C. Dit zijn eigenlijk twee stellingen:

- Als in een ΔABC de hoogtelijn uit C, de zwaartelijn uit C, de bissectrice (deellijn) van $\angle C$ en de middelloodlijn van AB samenvallen is $AC = BC$.
- Als in een ΔABC geldt dat $AC = BC$ dan vallen de hoogtelijn uit C, de zwaartelijn uit C, de bissectrice (deellijn) van $\angle C$ en de middelloodlijn van AB samen.

Je zegt wel dat het samenvallen van de vier genoemde lijnen en de eigenschap $AC = BC$ ‘equivalent of gelijkwaardig’ zijn. Dit is alleen het geval als van een stelling ook zijn omgekeerde waar is.

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je een zwaartelijn in een driehoek ABC.

a Teken een driehoek ABC met daarin alle drie de zwaartelijnen.

b Gaan de drie zwaartelijnen door één punt?

Opgave 2

Bewijs: ‘Als in een driehoek de hoogtelijn en de zwaartelijn uit hetzelfde hoekpunt samenvallen, dan is die lijn ook bissectrice van deze hoek en is de driehoek gelijkbenig.’

Opgave 3

Bewijs de volgende stellingen over hoogtelijnen, zwaartelijnen en bissectrices in een gelijkbenige driehoek.

a In een gelijkbenige driehoek zijn er twee even lange hoogtelijnen.

b In een gelijkbenige driehoek zijn er twee even lange zwaartelijnen.

c In een gelijkbenige driehoek zijn er twee even lange bissectrices.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De definities van een aantal bijzondere lijnen zijn:

- De **middelloodlijn** van een lijnstuk is de lijn die het lijnstuk loodrecht middendoor snijdt.
- De **bissectrice** of **deellijn** van een hoek is de halve lijn die de hoek middendoor deelt.
- De **middenparallel** van twee evenwijdige lijnen is de lijn die evenwijdig aan de twee lijnen is en midden tussen deze twee lijnen ligt.
- Een **hoogtelijn** van een driehoek is de lijn door een hoekpunt van de driehoek die de lijn door de tegenoverliggende zijde loodrecht snijdt.
- Een **zwaartelijn** van een driehoek is de lijn door een hoekpunt van de driehoek die door het midden van de tegenoverliggende zijde gaat.

Deze definities staan ook op de **Lijst van definities en stellingen voor vlakke meetkunde**.

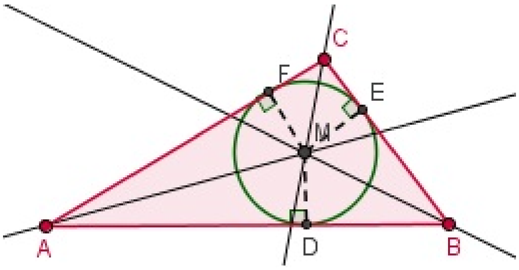
In een driehoek kun je drie middelloodlijnen, drie bissectrices, drie zwaartelijnen, drie hoogtelijnen en ook drie middenparallellen tekenen. Bij bepaalde driehoeken vallen meerdere van die lijnen samen, vaak gaan ze door één punt. Ze hebben bepaalde eigenschappen die je met behulp van congruentie en gelijkvormigheid kunt bewijzen.

Als van een stelling ook het omgekeerde waar is, dan noemen we die stelling en zijn omgekeerde **gelijkwaardig** of **equivalent**.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: Bissectrices.

Bewijs dat de bissectrices van de drie hoeken van een driehoek elkaar in één punt snijden en dat dit punt gelijke afstanden heeft tot elk van de zijden van de driehoek.



Figuur 4

Antwoord

Gegeven:
Zie de figuur, geconstrueerd in GeoGebra. AM en BM zijn bissectrices; CM is de lijn door C en M.

Te bewijzen:
$MD = ME = MF$ en lijn CM is bissectrice.

Bewijs:
Omdat AM bissectrice van $\angle A$ is, geldt: $\angle DAM = \angle FAM$. Verder is $AM = AM$ en $\angle ADM = \angle AFM = 90°$. Dus zijn ΔDAM en ΔFAM congruente driehoeken (ZHH).
Dit betekent $MD = MF$.
Op vergelijkbare wijze is $MD = ME$.
Omdat $CM = CM$, $MF = ME$ en $\angle CEM = \angle CFM = 90°$ zijn ΔCEM en ΔCFM congruent (ZZR).
En dus is $\angle ECM = \angle FCM$ en is CM bissectrice van $\angle C$.

Q.e.d.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** wordt bewezen dat de drie bissectrices van een driehoek ABC door één punt gaan.

a Loop het bewijs na. Welke congruentiekenmerken worden gebruikt?

b Waarom kun je een cirkel tekenen met middelpunt M die precies alle drie de zijden van ΔABC raakt?

Opgave 5

Teken (met ‘GeoGebra’ of maak een paar voorbeelden) een driehoek ABC met daarin de drie middelloodlijnen van de zijden.

a Bewijs dat deze drie middelloodlijnen door één punt M gaan.

b Ligt punt M altijd binnen de driehoek? Wanneer wel en wanneer niet?

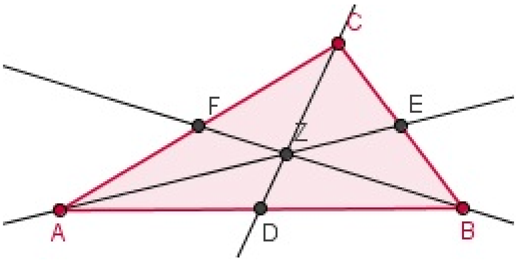
c Waarom kun je een cirkel met middelpunt M door de hoekpunten van de driehoek tekenen?

d Waarom kun je door drie willekeurige punten die niet op één rechte lijn liggen altijd een cirkel tekenen?

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: Zwaartelijnen.

Bewijs dat de zwaartelijnen van een driehoek elkaar in één punt snijden en dat dit punt de zwaartelijnen verdeelt in stukken die zich verhouden als 1 : 2.



Figuur 5

Antwoord

Gegeven:
Zie de figuur, geconstrueerd in GeoGebra.
AE, BF en CD zijn zwaartelijnen, dus $BE = EC$, $AF = FC$ en $AD = DB$. Z is het snijpunt van AE en BF.

Te bewijzen:
CD gaat door Z en $FZ : ZB = EZ : ZA = DZ : ZC = 1 : 2$.

Bewijs:
$CA = 2 \cdot CF$ en $CB = 2 \cdot CE$, dus ΔABC is gelijkvormig met ΔFEC (zhz). Dit betekent: $AB = 2 \cdot FE$ en $AB // FE$. Hieruit volgt: $\angle BAE = \angle AEF$ en $\angle ABF = \angle BFE$ (Z-hoeken). En dus is ΔABZ gelijkvormig met ΔEFZ (hh).
Omdat $AB = 2 \cdot FE$ is $FZ : ZB = 1 : 2 = EZ : ZA$. De zwaartelijnen AE en BF verdelen elkaar dus in de verhouding 1 : 2.
Eenzelfde redenering geldt voor bijvoorbeeld de zwaartelijnen AE en CD. En dus moet CD wel door punt Z gaan. Alle drie de zwaartelijnen gaan door één punt Z, het zwaartepunt van de driehoek.

Q.e.d.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** wordt bewezen dat de drie zwaartelijnen van een driehoek ABC door één punt gaan. In deze opgave ga je bewijzen dat de drie hoogtelijnen door één punt gaan.

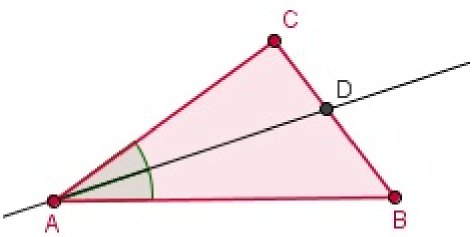
a Teken een driehoek ABC met daarin de drie hoogtelijnen.

b Bewijs dat die drie hoogtelijnen door één punt gaan. Teken daartoe ΔDEF door een lijn door A en evenwijdig BC, door B en evenwijdig AC en door C een lijn evenwijdig aan AB te trekken.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

Bewijs dat de bissectrice van een hoek in een driehoek de tegenoverliggende zijde verdeelt in stukken die zich verhouden als de zijden op de benen van die hoek.



Figuur 6

Antwoord

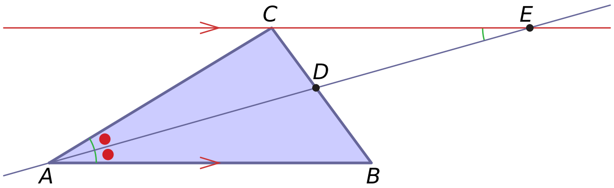
Gegeven:

$\angle BAD = \angle CAD$, zie de figuur, geconstrueerd in GeoGebra.

Te bewijzen:

$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$

Bewijs:
Trek een lijn door C evenwijdig met AB.



Figuur 7

Punt E is het snijpunt van de bissectrice met deze lijn.
Nu is $\angle CED = \angle BAD$ (Z-hoeken) en $\angle BAD = \angle CAD$ (gegeven) dus is $AC = CE$ (gelijkbenige driehoek AEC).

Verder zijn de driehoeken ABD en ECD gelijkvormig (hh).

Dus: $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{EC} = \frac{AB}{AC}$

Q.e.d.

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 3** het bewijs dat een bissectrice van een hoek in een driehoek de overstaande zijde in stukken verdeelt met dezelfde verhouding als de zijden op de benen van die hoek.

a Voer zelf dit bewijs uit voor de bissectrice van $\angle C$.

b Stel je voor dat in ΔABC geldt: $|AB| = 8$, $|BC| = 4$ en $|AC| = 6$. BD is de bissectrice van $\angle B$. Bereken de lengtes van AD en CD.

Verwerken

Opgave 8

A en B zijn punten van een cirkel. Bewijs dat de middelloodlijn van AB door het middelpunt M van de cirkel gaat.

Opgave 9

In ΔABC is h_A de lengte van de hoogtelijn uit A op BC en h_B die op AC.

$|BC| = a$ en $|AC| = b$

a Bewijs met gelijkvormigheid dat: $h_A : h_B = b : a$

b Bewijs deze stelling ook door formules voor de oppervlakte van een driehoek te gebruiken.

Opgave 10

Hoe kun je met behulp van middelloodlijnen het middelpunt van een cirkel vinden?

Opgave 11

Bewijs: ‘Een driehoek die twee zwaartelijnen van gelijke lengte heeft is gelijkbenig.’
(Je kunt hier werken met de stelling dat de zwaartelijnen in een driehoek elkaar verdelen in een verhouding van 1 : 2.)

Opgave 12

Een hoek in een driehoek heeft twee buitenhoeken. Dat zijn de hoeken met de verlengde van de zijden. De hoek zelf en een buitenhoek zijn dus samen altijd $180°$. De bissectrice van een buitenhoek heet de buitenbissectrice van die hoek.

a Bewijs dat bij een driehoek ABC de bissectrice van $\angle A$ en de buitenbissectrices bij B en C door één punt gaan.

b Bewijs dat de bissectrice van de hoek loodrecht staat op de buitenbissectrice van de bijbehorende buitenhoek.

c Bewijs: ‘Als in een hoekpunt van een driehoek de buitenbissectrice loodrecht staat op de zwaartelijn vanuit dat hoekpunt, dan is de driehoek gelijkbenig’.

Toepassen

Opgave 13: Bissectrice in parallellogram

Gegeven is een parallellogram $ABCD$. De bissectrice van hoekpunt A snijdt CD in E en het verlengde van BC in F.

Bewijs dat ΔECF een gelijkbenige driehoek is.

Testen

Opgave 14

In ΔABC is D het snijpunt van de hoogtelijn uit A op BC en E het snijpunt van de hoogtelijn uit B op AC.
Gegeven is: $\angle A > 90°$.

Bewijs dat $\angle ABC = \angle DEC$.

Opgave 15

Van een driehoek is gegeven dat voor twee van zijn zijden geldt: hun middelloodlijn gaat door het overstaande hoekpunt.

Toon aan dat de driehoek gelijkzijdig is.