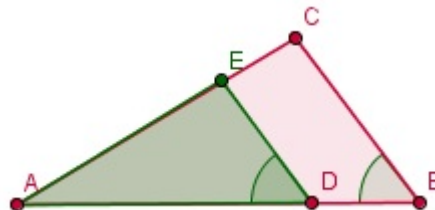


## 1.4 Gelijkvormigheid

### Inleiding

Bekijk de applet: [Gelijkvormige driehoeken.](#)

Hier zie je twee gelijkvormige driehoeken  $ABC$  en  $ADE$ . Van gelijkvormigheid kun je bij bewijzen (en berekeningen) vaak goed gebruik maken. Maar wanneer zijn twee driehoeken nu precies gelijkvormig?



Figuur 1

### Je leert in dit onderwerp

- gelijkvormige driehoeken herkennen;
- bewijzen leveren met de gelijkvormigheidskenmerken.

### Voorkennis

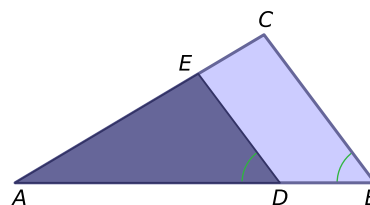
- eenvoudige bewijzen leveren vanuit de lijst met definities/stellingen voor Vlakke Meetkunde.
- gebruik maken van congruentie en de congruentiekenmerken van driehoeken.

### Verkennen

#### Opgave V1

Hier zie je twee gelijkvormige driehoeken  $ABC$  en  $ADE$ . Van gelijkvormigheid kun je bij bewijzen (en berekeningen) vaak goed gebruik maken. Maar wanneer zijn twee driehoeken nu precies gelijkvormig?

Kun je gelijkvormigheidskenmerken formuleren op dezelfde wijze als de congruentiekenmerken?



Figuur 2

### Uitleg

Bekijk de applet: [Gelijkvormige driehoeken.](#)

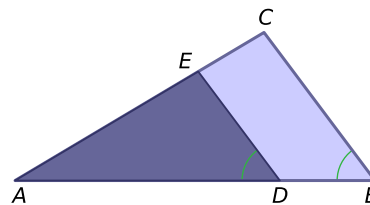
Twee driehoeken heten 'gelijkvormig' als de ene driehoek een vergroting of verkleining is van de andere driehoek.

Je ziet twee driehoeken  $ABC$  en  $ADE$ .

$\angle BAC = \angle DAE$  want ze vallen samen.

Ook geldt  $\angle ABC = \angle ADE$  (gegeven door beide boogjes).

Je kunt  $|AD|$  vermenigvuldigen met een zodanige factor  $k$  dat hij gelijk wordt aan  $|AB|$ . Omdat de hoeken gelijk blijven wordt dan ook  $|AC| = k \cdot |AE|$  en  $|DE| = k \cdot |BC|$ . En dus is  $\Delta ABC$  een vergroting van  $\Delta ADE$ .



Figuur 3

Het gelijkvormigheidskenmerk dat je nu hebt gebruikt is hh: beide driehoeken zijn gelijkvormig als hun hoeken gelijk zijn.

Je ziet, dat daaruit automatisch volgt dat ook hun zijden gelijke verhoudingen hebben:  $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|DE|} = k$ . Ook die gelijke verhoudingen van zijden kun je als kenmerk voor gelijkvormigheid gebruiken.

### Opgave 1

In de **Uitleg** wordt een begin gemaakt met de gelijkvormigheidskenmerken. Bekijk de driehoeken  $ABC$  en  $ADE$  in de figuur.

- a Waarom wordt het gebruikte gelijkvormigheidskenmerk aangeduid met hh en niet met hhh?
- b Met welke factor moet je  $|AD|$  vermenigvuldigen om  $|AB|$  te krijgen?
- c Leg uit, waarom je  $|AC|$  krijgt door  $|AE|$  met diezelfde factor te vermenigvuldigen.

Een ander gelijkvormigheidskenmerk wordt aangeduid met zhz: beide driehoeken hebben één gelijke hoek en de zijden op de benen van die hoek hebben dezelfde verhoudingen.

- d Waarom levert het kenmerk zhz twee gelijkvormige driehoeken op?

### Opgave 2

Zijn congruente driehoeken altijd gelijkvormig? Geldt het omgekeerde ook?

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

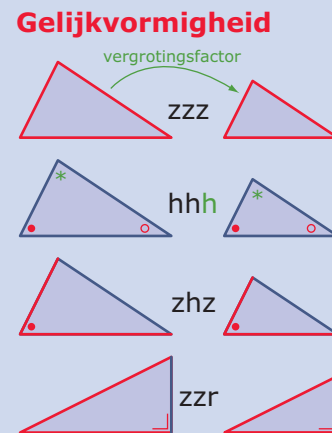
Twee driehoeken heten **gelijkvormig** als de ene driehoek een vergroting of verkleining is van de andere driehoek. Ze hebben dan dezelfde hoeken en de verhoudingen van hun zijden zijn gelijk.

Of twee driehoeken gelijkvormig zijn, volgt uit deze **gelijkvormigheidskenmerken**. Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze gelijk hebben:

- de verhoudingen van de zijden (zzz);
- één paar hoeken en de verhouding van de omliggende zijden (zhz);
- twee paren hoeken (hh);
- één rechte hoek en de verhouding van twee niet omliggende zijden (zzr).

Een paar zijden (hoeken) betekent hier steeds een zijde (hoek) van de ene driehoek en de overeenkomstige zijde (hoek) van de andere driehoek. Deze gelijkvormigheidskenmerken staan ook op de **Lijst van definities en stellingen voor vlakke meetkunde**. Merk op dat er kleine letters worden gebruikt om er naar te verwijzen in tegenstelling tot de congruentiekenmerken.

De gelijkvormigheidskenmerken zijn af te leiden uit de congruentiekenmerken.



Figuur 4

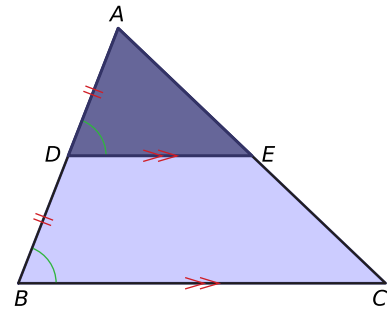
### Voorbeeld 1

Bekijk de applet: Middenparallel.

Bewijs:

De lengte van een lijnstuk vanuit het midden van een zijde van een driehoek en evenwijdig met een andere zijde van die driehoek is gelijk aan de helft van de lengte van de zijde waaraan het evenwijdig is.

Zo'n lijnstuk heet een 'middenparallel' in de gegeven driehoek.



Figuur 5

Antwoord

**Gegeven:**

$D$  is het midden van  $AB$  en  $DE \parallel BC$ .

**Te bewijzen:**

$$|DE| = \frac{1}{2}|BC|$$

**Bewijs:**

Omdat  $DE \parallel BC$  is  $\angle ADE = \angle ABC$  en  $\angle DEA = \angle BCA$  (F-hoeken)

Dus zijn  $\triangle ABC$  en  $\triangle ADE$  gelijkvormig (hh).

De zijden van beide driehoeken hebben daarom dezelfde verhoudingen, namelijk  $1 : 2$ . En dus is

$$|DE| = \frac{1}{2}|BC|.$$

Q.e.d.

### Opgave 3

In **Voorbeeld 1** wordt de stelling bewezen dat een middenparallel binnen een driehoek de helft is van de zijde waaraan hij evenwijdig is.

- Loop het bewijs na. Welk gelijkvormigheidskenmerk wordt gebruikt?
- Neem de driehoek uit het voorbeeld over en teken de lijnstukken  $BE$  en  $CD$ . Deze lijnstukken snijden elkaar in punt  $S$ . Welke twee gelijkvormige driehoeken ontstaan nu?

### Voorbeeld 2

Bekijk de applet

In  $\triangle ABC$  zijn de hoogtelijnen  $AD$  en  $BE$  getrokken. Bewijs dat  $\triangle DEC$  gelijkvormig is met  $\triangle ABC$ .

Antwoord

**Gegeven:**

$$\angle ADC = \angle BEC = 90^\circ$$

**Te bewijzen:**

$\triangle DEC$  is gelijkvormig met  $\triangle ABC$ .

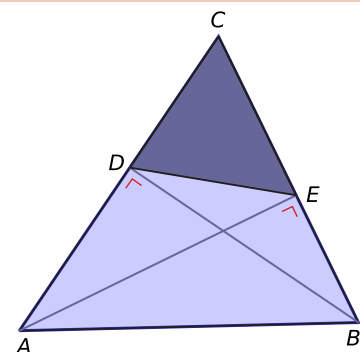
**Bewijs:**

Omdat  $\angle ADC = \angle BEC = 90^\circ$  en  $\angle C = \angle C$  zijn  $\triangle ADC$  en  $\triangle BEC$  gelijkvormig (hh).

$$\text{En daarom is } \frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|CE|}{|CB|}.$$

Vanwege deze gelijke verhoudingen en  $\angle C = \angle C$  zijn  $\triangle ABC$  en  $\triangle DEC$  gelijkvormig (zhz).

Q.e.d.



Figuur 6

### Opgave 4

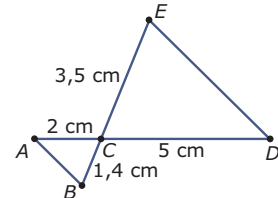
Bekijk **Voorbeeld 2**.

- a Maak een verhoudingstabel van de zijden van de driehoeken  $ABC$  en  $DEC$ . Ga na, dat bij deze tabel ook inderdaad  $\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|CE|}{|CB|}$  past.
- b Gegeven is  $|AB| = 6$ ,  $|BC| = 4$  en  $|ED| = 2,5$ . Welke van beide andere zijden van  $\triangle DEC$  kun je met deze gegevens berekenen? Voer die berekening uit.

### Opgave 5

Hier zie je twee driehoeken, namelijk  $\triangle ABC$  en  $\triangle CDE$ .

- a Met welk gelijkvormigheidskenmerk toon je aan dat beide gelijkvormig zijn? Je noteert dit wel zo:  $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ .
- b Wat kun je op grond daarvan zeggen over de zijden  $AB$  en  $DE$ ?
- c Neem aan, dat  $|AB| = 1,8$  cm. Hoe lang is dan  $DE$ ?



Figuur 7

### Voorbeeld 3

Bekijk de applet

$\triangle ABC$  heeft in  $C$  een rechte hoek.

Bewijs dat  $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$ . Dit is de stelling van Pythagoras.

Antwoord

**Gegeven:**

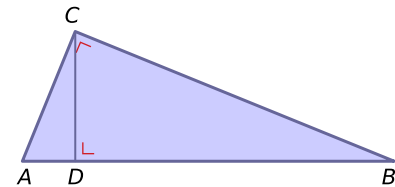
$\angle ACB = 90^\circ$ . Je tekent hoogtelijn  $CD$ , dus ook  $\angle ADC = \angle CDB = 90^\circ$ .

**Te bewijzen:**

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$$

**Bewijs:**

De driehoeken  $ABC$ ,  $CBD$  en  $ACD$  zijn gelijkvormig (hh). De verhoudingen van hun zijden zijn daarom gelijk, dus je kunt deze verhoudingstabel maken.



Figuur 8

$\triangle ABC$	$ AB $	$ BC $	$ AC $
$\triangle CBD$	$ CB $	$ BD $	$ CD $
$\triangle ACD$	$ AC $	$ CD $	$ AD $

Tabel 1

Hieruit kun je afleiden:

$$|BC|^2 = |AB| \cdot |BD| \text{ en } |AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$$

$$\text{Dus: } |AC|^2 + |BC|^2 = |AB| \cdot |BD| + |AB| \cdot |AD| = |AB| \cdot (|BD| + |AD|) = |AB|^2.$$

Q.e.d.

Je ziet een geheel nieuw bewijs van de stelling van Pythagoras.

### Opgave 6

In **Voorbeeld 3** vind je een ander bewijs van de stelling van Pythagoras.

- a Neem aan dat  $|AC| = 5$  en  $|BC| = 12$ . Bereken de lengte van  $CD$ .
- b Bewijs dat in een rechthoekige driehoek het kwadraat van de hoogtelijn op de hypotenusa gelijk is aan het product van de lengtes waarin hij die hypotenusa verdeelt.

### Opgave 7

Gegeven is een driehoek  $ABC$  en een punt  $S$  in de driehoek.  $A'$  ligt op het verlengde van  $AS$ , waarbij  $|SA'| = 2|SA|$ . Net zo ligt  $B'$  op het verlengde van  $BS$  met  $|SB'| = 2|SB|$  en  $C'$  op het verlengde van  $CS$  met  $|SC'| = 2|SC|$ .

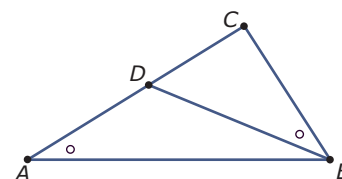
- Maak een tekening.
- Met welk kenmerk kun je aantonen dat  $\triangle SAB \sim \triangle SA'B'$ ?
- Wat concludeer je over  $\angle A'B'C'$ ? Wat gaat natuurlijk net zo?
- Met welk kenmerk kun je aantonen dat  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ?
- Hoe belangrijk is de factor 2 in het gegeven? Had die factor ook kleiner dan 1 mogen zijn?
- Formuleer op grond van het bovenstaande een stelling. Maak hem zo algemeen mogelijk.

### Verwerken

#### Opgave 8

In deze figuur is  $\angle BAD = \angle DBC$ ,  $|AB| = 10$ ,  $|AC| = 8$  en  $|BC| = 5$ .

- Welke twee gelijkvormige driehoeken zijn er? Bewijs de gelijkvormigheid.
- Bereken de lengte van  $DB$ .



Figuur 9

#### Opgave 9

Op een been van een hoek met hoekpunt  $A$  ligt een punt  $B$  en op het andere been ligt een punt  $C$ .  $AB = 12$  cm en  $AC = 20$  cm. Op het verlengde van  $BA$  ligt een punt  $D$  met  $AD = 5$  cm en op het verlengde van  $CA$  ligt een punt  $E$  zo, dat  $\angle EDA = \angle BCA$ .

Bereken de lengte van  $AE$ .

#### Opgave 10

Teken in een willekeurige scherphoekige driehoek  $ABC$  een loodlijn  $AD$  vanuit  $A$  op zijde  $BC$  en een loodlijn  $BE$  vanuit  $B$  op zijde  $AC$ . Het snijpunt van deze loodlijnen is  $S$ .

Bewijs dat  $|AS| \cdot |SD| = |BS| \cdot |SE|$ .

#### Opgave 11

Vierhoek  $ABCD$  is een ruit. De punten  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  en  $S$  zijn de middens van de zijden van die ruit.

Bewijs met behulp van gelijkvormigheid dat  $PQRS$  een rechthoek is.

#### Opgave 12

Bewijs dat je elke driehoek in vier gelijke delen kunt verdelen met behulp van drie middenparallellellen.

#### Opgave 13

In een driehoek  $ABC$  wordt op  $AC$  een punt  $P_0$  gekozen zo, dat  $|AP_0| : |AC| = 1 : 5$ . Dan wordt vanuit  $P_0$  een lijn evenwijdig aan  $BC$  getrokken naar  $P_1$  op  $AB$ . Vervolgens vanuit  $P_1$  een lijn evenwijdig aan  $CA$  naar  $P_2$  op  $BC$  en vanuit  $P_2$  een lijn evenwijdig aan  $AB$  naar  $P_3$  op  $CA$ . Met  $P_3$  in plaats van  $P_0$  worden net zo weer drie lijnen getrokken, naar  $P_4$  op  $AB$ ,  $P_5$  op  $BC$  en naar  $P_6$  op  $CA$ .

- Teken de situatie. Welk vermoeden levert een tekening over de ligging van  $P_6$ ?
- Bewijs dat vermoeden.

Aanwijzing: In welke verhouding verdelen de punten  $P$  de zijden van de driehoek?

## Toepassen

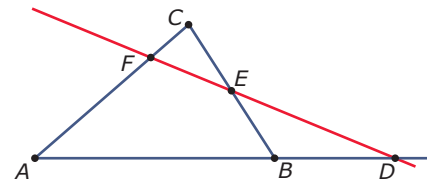
### Opgave 14: De stelling van Menelaos

De drie (verlengde) zijden van een driehoek  $ABC$  worden gesneden door een lijn  $m$ . Het snijpunt van (het verlengde van)  $AB$  met  $m$  is punt  $D$ , het snijpunt van (het verlengde) van  $BC$  met  $m$  is punt  $E$  en het snijpunt van (het verlengde) van  $AC$  met  $m$  is punt  $F$ .

Bewijs dat nu geldt:  $\frac{|AD|}{|BD|} \cdot \frac{|BE|}{|CE|} \cdot \frac{|CF|}{|AF|} = 1$

Dit is een variant van een uitgebreidere **stelling** die wordt toegeschreven aan Menelaos van Alexandrië (70-140 na Chr.).

- In de getekende situatie ligt alleen  $D$  op het verlengde van  $AB$ . Lever eerst voor deze situatie het bewijs.
- Teken nu een situatie waarin niet alleen  $D$  op het verlengde van  $AB$ , maar ook  $E$  op het verlengde van  $BC$  en  $F$  op het verlengde van  $AC$  ligt. Lever ook voor die situatie een bewijs.



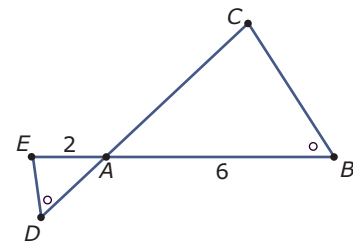
Figuur 10

## Testen

### Opgave 15

In de figuur hiernaast zie je twee lijnstukken  $EB$  en  $DC$  die elkaar snijden in  $A$ . Verder is gegeven  $\angle B = \angle D$ .

Bereken de lengte van  $AD$  en die van  $ED$ .



Figuur 11

### Opgave 16

In driehoek  $ABC$  is  $D$  het midden van  $BC$  en  $E$  het midden van  $AC$ . De lijnstukken  $BE$  en  $AD$  snijden elkaar in  $S$ .

Bewijs dat  $|AS| : |SD| = |BS| : |SE| = 2 : 1$ .



© 2022

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: [f.spijkers@math4all.nl](mailto:f.spijkers@math4all.nl)

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij [a.f.otten@xs4all.nl](mailto:a.f.otten@xs4all.nl) een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.

---

