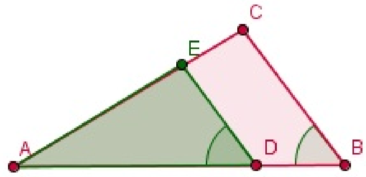
1.4 Gelijkvormigheid

Inleiding

Hier zie je twee gelijkvormige driehoeken ABC en ADE. Van gelijkvormigheid kun je bij bewijzen (en berekeningen) vaak goed gebruik maken. Maar wanneer zijn twee driehoeken nu precies gelijkvormig?



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- gelijkvormige driehoeken herkennen;
- bewijzen leveren met de gelijkvormigheidskenmerken.

Voorkennis

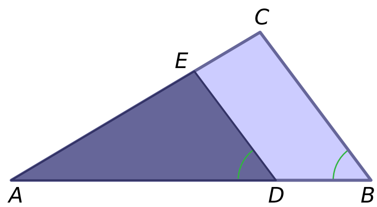
- eenvoudige bewijzen leveren vanuit de lijst met definities/stellingen voor Vlakke Meetkunde.
- gebruik maken van congruentie en de congruentiekenmerken van driehoeken.

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je twee gelijkvormige driehoeken ABC en ADE. Van gelijkvormigheid kun je bij bewijzen (en berekeningen) vaak goed gebruik maken. Maar wanneer zijn twee driehoeken nu precies gelijkvormig?

Kun je gelijkvormigheidskenmerken formuleren op dezelfde wijze als de congruentiekenmerken?

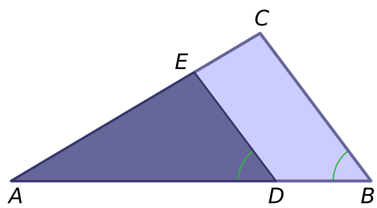


Figuur 2

Uitleg

Bekijk de applet: Gelijkvormige driehoeken.

Twee driehoeken heten ‘gelijkvormig’ als de ene driehoek een vergroting of verkleining is van de andere driehoek.
Je ziet twee driehoeken ABC en ADE.
$\angle BAC = \angle DAE$ want ze vallen samen.
Ook geldt $\angle ABC = \angle ADE$ (gegeven door beide boogjes).



Figuur 3

Je kunt $|AD|$ vermenigvuldigen met een zodanige factor k dat hij gelijk wordt aan $|AB|$. Omdat de hoeken gelijk blijven wordt dan ook $|AC| = k \cdot |AE|$ en $|DE| = k \cdot |BC|$. En dus is ΔABC een vergroting van ΔADE.

Het gelijkvormigheidskenmerk dat je nu hebt gebruikt is hh: beide driehoeken zijn gelijkvormig als hun hoeken gelijk zijn.

Je ziet, dat daaruit automatisch volgt dat ook hun zijden gelijke verhoudingen hebben: $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|DE|} = k$. Ook die gelijke verhoudingen van zijden kun je als kenmerk voor gelijkvormigheid gebruiken.

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt een begin gemaakt met de gelijkvormigheidskenmerken. Bekijk de driehoeken ABC en ADE in de figuur.

a Waarom wordt het gebruikte gelijkvormigheidskenmerk aangeduid met hh en niet met hhh?

b Met welke factor moet je $|AD|$ vermenigvuldigen om $|AB|$ te krijgen?

c Leg uit, waarom je $|AC|$ krijgt door $|AE|$ met diezelfde factor te vermenigvuldigen.

Een ander gelijkvormigheidskenmerk wordt aangeduid met zhz: beide driehoeken hebben één gelijke hoek en de zijden op de benen van die hoek hebben dezelfde verhoudingen.

d Waarom levert het kenmerk zhz twee gelijkvormige driehoeken op?

Opgave 2

Zijn congruente driehoeken altijd gelijkvormig? Geldt het omgekeerde ook?

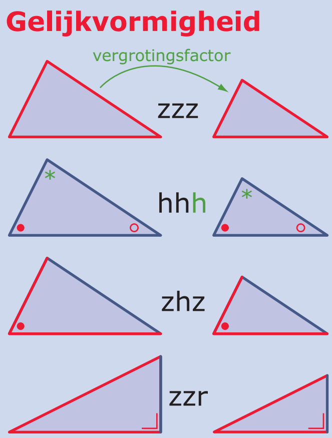
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Twee driehoeken heten **gelijkvormig** als de ene driehoek een vergroting of verkleining is van de andere driehoek. Ze hebben dan dezelfde hoeken en de verhoudingen van hun zijden zijn gelijk.

Of twee driehoeken gelijkvormig zijn, volgt uit deze **gelijkvormigheidskenmerken**. Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze gelijk hebben:

- de verhoudingen van de zijden (zzz);
- één paar hoeken en de verhouding van de omliggende zijden (zhz);
- twee paren hoeken (hh);
- één rechte hoek en de verhouding van twee niet omliggende zijden (zzr).



Figuur 4

Een paar zijden (hoeken) betekent hier steeds een zijde (hoek) van de ene driehoek en de overeenkomstige zijde (hoek) van de andere driehoek. Deze gelijkvormigheidskenmerken staan ook op de **Lijst van definities en stellingen voor vlakke meetkunde**. Merk op dat er kleine letters worden gebruikt om er naar te verwijzen in tegenstelling tot de congruentiekenmerken.
De gelijkvormigheidskenmerken zijn af te leiden uit de congruentiekenmerken.

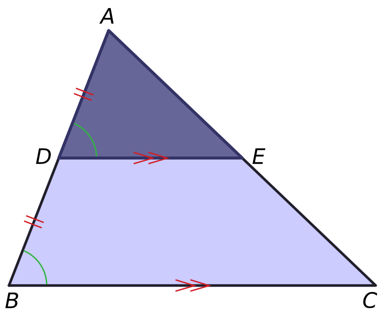
Voorbeeld 1

Bekijk de applet: Middenparallel.

Bewijs:

De lengte van een lijnstuk vanuit het midden van een zijde van een driehoek en evenwijdig met een andere zijde van die driehoek is gelijk aan de helft van de lengte van de zijde waaraan het evenwijdig is.

Zo'n lijnstuk heet een ‘middenparallel’ in de gegeven driehoek.



Figuur 5

Antwoord

Gegeven:
D is het midden van AB en $DE // BC$.

Te bewijzen:

$|DE| = \frac{1}{2}|BC|$

Bewijs:
Omdat $DE // BC$ is $\angle ADE = \angle ABC$ en $\angle DEA = \angle BCA$ (F-hoeken)
Dus zijn ΔABC en ΔADE gelijkvormig (hh).
De zijden van beide driehoeken hebben daarom dezelfde verhoudingen, namelijk 1 : 2. En dus is $|DE| = \frac{1}{2}|BC|$.

Q.e.d.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** wordt de stelling bewezen dat een middenparallel binnen een driehoek de helft is van de zijde waaraan hij evenwijdig is.

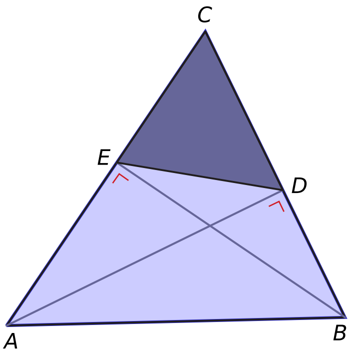
a Loop het bewijs na. Welk gelijkvormigheidskenmerk wordt gebruikt?

b Neem de driehoek uit het voorbeeld over en teken de lijnstukken BE en CD. Deze lijnstukken snijden elkaar in punt S. Welke twee gelijkvormige driehoeken ontstaan nu?

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

In ΔABC zijn de hoogtelijnen AD en BE getrokken. Bewijs dat ΔDEC gelijkvormig is met ΔABC.



Figuur 6

Antwoord

Gegeven:
$\angle ADC = \angle BEC = 90°$

Te bewijzen:
ΔDEC is gelijkvormig met ΔABC.

Bewijs:
Omdat $\angle ADC = \angle BEC = 90°$ en $\angle C = \angle C$ zijn ΔADC en ΔBEC gelijkvormig (hh).

En daarom is $\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|CE|}{|CB|}$.
Vanwege deze gelijke verhoudingen en $\angle C = \angle C$ zijn ΔABC en ΔDEC gelijkvormig (zhz).

Q.e.d.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Maak een verhoudingstabel van de zijden van de driehoeken ABC en DEC. Ga na, dat bij deze tabel ook inderdaad $\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|CE|}{|CB|}$ past.

b Gegeven is $|AB| = 6$, $|BC| = 4$ en $|ED| = 2{,}5$. Welke van beide andere zijden van ΔDEC kun je met deze gegevens berekenen? Voer die berekening uit.

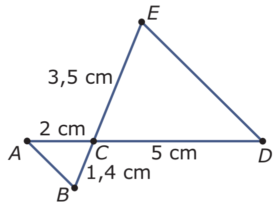
Opgave 5

Hier zie je twee driehoeken, namelijk ΔABC en ΔCDE.

a Met welk gelijkvormigheidskenmerk toon je aan dat beide gelijkvormig zijn? Je noteert dit wel zo: $\Delta ABC \sim \Delta DEC$.

b Wat kun je op grond daarvan zeggen over de zijden AB en DE?

c Neem aan, dat $|AB| = 1{,}8$ cm. Hoe lang is dan DE?



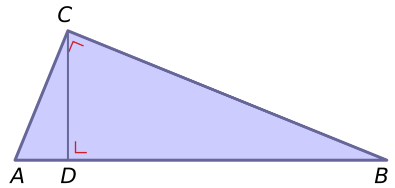
Figuur 7

Voorbeeld 3

Bekijk de applet

ΔABC heeft in C een rechte hoek.

Bewijs dat $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$. Dit is de stelling van Pythagoras.



Figuur 8

Antwoord

Gegeven:
$\angle ACB = 90°$. Je tekent hoogtelijn CD, dus ook $\angle ADC = \angle CDB = 90°$.

Te bewijzen:

$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$

Bewijs:
De driehoeken ABC, CBD en ACD zijn gelijkvormig (hh). De verhoudingen van hun zijden zijn daarom gelijk, dus je kunt deze verhoudingstabel maken.

ΔABC	$\|AB\|$	$\|BC\|$	$\|AC\|$
ΔCBD	$\|CB\|$	$\|BD\|$	$\|CD\|$
ΔACD	$\|AC\|$	$\|CD\|$	$\|AD\|$

Tabel 1

Hieruit kun je afleiden:

$|BC|^2 = |AB| \cdot |BD|$ en $|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$

Dus: $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB| \cdot |BD| + |AB| \cdot |AD| = |AB| \cdot (|BD| + |AD|) = |AB|^2$.

Q.e.d.

Je ziet een geheel nieuw bewijs van de stelling van Pythagoras.

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** vind je een ander bewijs van de stelling van Pythagoras.

a Neem aan dat $|AC| = 5$ en $|BC| = 12$. Bereken de lengte van CD.

b Bewijs dat in een rechthoekige driehoek het kwadraat van de hoogtelijn op de hypotenusa gelijk is aan het product van de lengtes waarin hij die hypotenusa verdeelt.

Opgave 7

Gegeven is een driehoek ABC en een punt S in de driehoek. A' ligt op het verlengde van AS, waarbij $|SA'| = 2|SA|$. Net zo ligt B' op het verlengde van BS met $|SB'| = 2|SB|$ en C' op het verlengde van CS met $|SC'| = 2|SC|$.

a Maak een tekening.

b Met welk kenmerk kun je aantonen dat $\Delta SAB \sim \Delta SA'B'$?

c Wat concludeer je over $|A'B'|$? Wat gaat natuurlijk net zo?

d Met welk kenmerk kun je aantonen dat $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$?

e Hoe belangrijk is de factor 2 in het gegeven? Had die factor ook kleiner dan 1 mogen zijn?

f Formuleer op grond van het bovenstaande een stelling. Maak hem zo algemeen mogelijk.

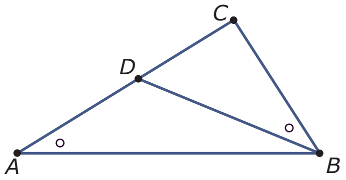
Verwerken

Opgave 8

In deze figuur is $\angle BAD = \angle DBC$, $|AB| = 10$, $|AC| = 8$ en $|BC| = 5$.

a Welke twee gelijkvormige driehoeken zijn er? Bewijs de gelijkvormigheid.

b Bereken de lengte van DB.



Figuur 9

Opgave 9

Op een been van een hoek met hoekpunt A ligt een punt B en op het andere been ligt een punt C. $AB = 12$ cm en $AC = 20$ cm. Op het verlengde van BA ligt een punt D met $AD = 5$ cm en op het verlengde van CA ligt een punt E zo, dat $\angle EDA = \angle BCA$.

Bereken de lengte van AE.

Opgave 10

Teken in een willekeurige scherphoekige driehoek ABC een loodlijn AD vanuit A op zijde BC en een loodlijn BE vanuit B op zijde AC. Het snijpunt van deze loodlijnen is S.

Bewijs dat $|AS| \cdot |SD| = |BS| \cdot |SE|$.

Opgave 11

Vierhoek $ABCD$ is een ruit. De punten P, Q, R en S zijn de middens van de zijden van die ruit.

Bewijs met behulp van gelijkvormigheid dat $PQRS$ een rechthoek is.

Opgave 12

Bewijs dat je elke driehoek in vier gelijke delen kunt verdelen met behulp van drie middenparallellen.

Opgave 13

In een driehoek ABC wordt op AC een punt P_0 gekozen zo, dat $|AP_0| : |AC| = 1 : 5$. Dan wordt vanuit P_0 een lijn evenwijdig aan BC getrokken naar P_1 op AB. Vervolgens vanuit P_1 een lijn evenwijdig aan CA naar P_2 op BC en vanuit P_2 een lijn evenwijdig aan AB naar P_3 op CA. Met P_3 in plaats van P_0 worden net zo weer drie lijnen getrokken, naar P_4 op AB, P_5 op BC en naar P_6 op CA.

a Teken de situatie. Welk vermoeden levert een tekening over de ligging van P_6?

b Bewijs dat vermoeden.

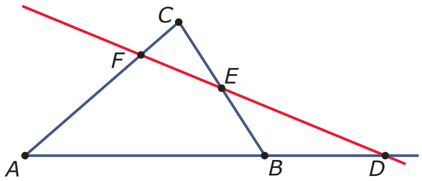
Aanwijzing: In welke verhouding verdelen de punten P de zijden van de driehoek?

Toepassen

Opgave 14: De stelling van Menelaos

De drie (verlengde) zijden van een driehoek ABC worden gesneden door een lijn m. Het snijpunt van (het verlengde van) AB met m is punt D, het snijpunt van (het verlengde) van BC met m is punt E en het snijpunt van (het verlengde) van AC met m is punt F.

Bewijs dat nu geldt: $\frac{|AD|}{|BD|} \cdot \frac{|BE|}{|CE|} \cdot \frac{|CF|}{|AF|} = 1$.



Figuur 10

Dit is een variant van een uitgebreidere **stelling** die wordt toegeschreven aan Menelaos van Alexandrië (70—140 na Chr.).

a In de getekende situatie ligt alleen D op het verlengde van AB. Lever eerst voor deze situatie het bewijs.

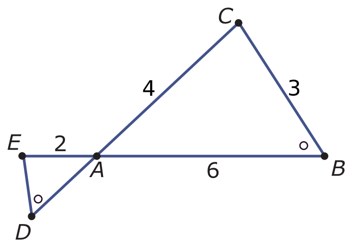
b Teken nu een situatie waarin niet alleen D op het verlengde van AB, maar ook E op het verlengde van BC en F op het verlengde van AC ligt. Lever ook voor die situatie een bewijs.

Testen

Opgave 15

In de figuur hiernaast zie je twee lijnstukken EB en DC die elkaar snijden in A. Verder is gegeven $\angle B = \angle D$.

Bereken de lengte van AD en die van ED.



Figuur 11

Opgave 16

In driehoek ABC is D het midden van BC en E het midden van AC. De lijnstukken BE en AD snijden elkaar in S.

Bewijs dat $|AS| : |SD| = |BS| : |SE| = 2 : 1$.

© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.