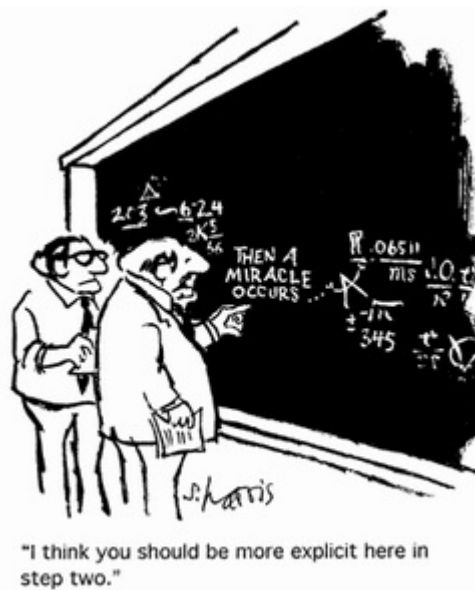


## 1.3 Bewijzen

### Inleiding

Een bewijs in de wiskunde is een logische redenering waarmee wordt aangetoond dat een bepaalde bewering volgt uit de (voor waar aangenomen) axioma's en uit eerder bewezen stellingen. Die bewering wordt (als een bewijs is geleverd) dan een stelling en toegevoegd aan het theoretische bouwwerk (zoals de vlakke meetkunde). Elk bewijs kent een vaste structuur. Verder moet je goed afspreken van welke theorie je mag uitgaan.



Figuur 1

### Je leert in dit onderwerp

- een bewijs leveren volgens een vaste structuur;
- bewijzen leveren met behulp van de lijst van definities/stellingen in de Vlakke Meetkunde voor vwo wiskunde B.

### Voorkennis

- eenvoudige bewijzen leveren vanuit de basisdefinities en axioma's van de vlakke meetkunde.
- gebruik maken van congruentie en de congruentiekenmerken van driehoeken.

### Verkennen

#### Opgave V1

Bekijk de [Lijst van definities en stellingen voor vlakke meetkunde](#). Probeer door alleen gebruik te maken van die lijst de volgende stelling te bewijzen:

'Een driehoek waarvan de hoekpunten de middens zijn van drie zijden van een vierkant is rechthoekig en gelijkbenig.'

## Uitleg

### Bekijk de applet

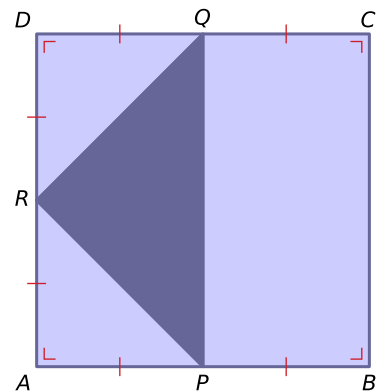
In deze figuur is een vierkant  $ABCD$  geconstrueerd. De punten  $P$ ,  $Q$  en  $R$  zijn de middens van drie zijden van het vierkant. Je 'ziet' dat  $\triangle PQR$  een gelijkbenige rechthoekige driehoek is.

Het volgende 'vermoeden' ontstaat:

'Een driehoek waarvan de hoekpunten de middens zijn van drie zijden van een vierkant is rechthoekig en gelijkbenig.'

Maar kun je dat ook echt bewijzen?

Om zo'n bewering (vermoeden) te bewijzen is het verstandig om eerst de gegevens netjes op een rijtje te zetten en letters in te voeren. In de figuur is dat al gedaan. **Gegeven** is:  $ABCD$  is vierkant en  $AP = PB$ ,  $CQ = QD$  en  $DR = RA$ . Voor het gemak zijn de absolute strepen weggelaten.



Figuur 2

**Te bewijzen** is nu dat  $PR = QR$  en  $\angle PRQ = 90^\circ$ .

Nu kun je over het **bewijs** gaan nadenken.

Ga uit van de [Lijst van definities en stellingen voor vlakke meetkunde](#).

Bij bewijzen in de vlakke meetkunde kun je vaak goed gebruik maken van 'GeoGebra', een computerprogramma dat je gratis kunt downloaden en speciaal bedoeld is voor de vlakke meetkunde.

### Opgave 1

In de **Uitleg** wordt de bewijsstructuur 'Gegeven, te bewijzen, bewijs' ingeleid.

- Wat is het verschil tussen de stelling zelf en de beschrijving ervan onder de kopjes 'Gegeven' en 'Te bewijzen'?
- Wat is het belang van zo'n vaste bewijsstructuur?

### Opgave 2

In de **Uitleg** wordt een begin gemaakt met het bewijs van de stelling: 'Een driehoek waarvan de hoekpunten de middens zijn van drie zijden van een vierkant is rechthoekig en gelijkbenig.'

- Laat zien dat de driehoeken  $APR$  en  $DQR$  congruent zijn.
- Leg uit hoe je daaruit het bewijs levert.

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

Een **bewijs** is een logische redenering waarin je laat zien hoe een bepaalde bewering uit de al bestaande axioma's en definities en eerder bewezen stellingen volgt. Als het bewijs is geleverd wordt de bewering een **stelling**. Je uitgangspunt is de [Lijst van definities en stellingen voor vlakke meetkunde](#). Je moet door alleen gebruik te maken van die lijst alle stellingen bewijzen. Gebruik de volgende structuur voor een bewijs:

#### Gegeven:

- Beknoper en duidelijke beschrijving van wat er gegeven is, vaak met een duidelijke figuur erbij. Kies alvast letters voor punten, lijnen, e.d.

#### Te bewijzen:

- Beknoper en duidelijke beschrijving van wat je wilt bewijzen. Gebruik de gekozen letters.

**Bewijs:**

- Het eigenlijke bewijs met verwijzingen naar de boven genoemde lijst van definities en stellingen voor vlakke meetkunde.

Er zijn meerdere manieren om bewijzen te leveren. Twee belangrijke zijn:

- een **direct bewijs** waarbij je rechtstreeks vanuit de gegeven lijst van definities en stellingen redeneert en laat zien dat het vermoeden daaruit volgt;
- een **indirect bewijs** of **bewijs uit het ongerijmde** waarin je aanneemt dat het vermoeden niet waar is en laat zien dat dit in tegenspraak is met de lijst van definities en stellingen.

**Voorbeeld 1**

In een opgave in de **Uitleg** heb je het volgende bewezen:  
 ‘Een driehoek waarvan de hoekpunten de middens zijn van drie zijden van een vierkant is rechthoekig en gelijkbenig.’

Zet dit bewijs in de structuur van Gegeven, Te bewijzen, Bewijs.

Antwoord

**Gegeven:**

Zie figuur; er zijn letters ingevoerd, de streepjes geven gelijke lijnstukken aan.  $ABCD$  is een vierkant.

$AP = PB$ ,  $CQ = QD$  en  $DR = RA$

**Te bewijzen:**

$PR = QR$  en  $\angle PRQ = 90^\circ$ .

**Bewijs:**

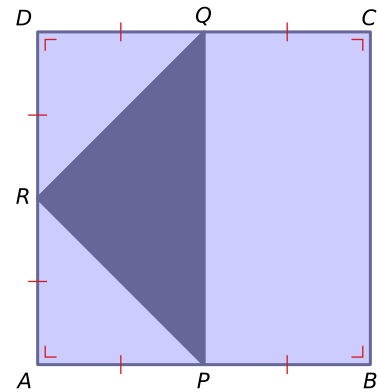
Omdat  $AP = QD$  (halve zijde van vierkant  $ABCD$ ),  $DR = RA$  (gegeven) en  $\angle A = \angle D = 90^\circ$  zijn driehoeken  $APR$  en  $DQR$  congruent (ZHZ).

Dus is:  $PR = QR$ .

Omdat zowel  $\triangle APR$  als  $\triangle DQR$  gelijkbenig en rechthoekig is, is:  $\angle ARP = \angle DRQ = 45^\circ$  (hoekensom driehoek)

Dus is:  $\angle PRQ = 180 - 45 - 45 = 90^\circ$ .

Q.e.d.



**Figuur 3**

**Opgave 3**

In **Voorbeeld 1** zie je een bewijs van de stelling: ‘Een driehoek waarvan de hoekpunten de middens zijn van drie zijden van een vierkant is rechthoekig en gelijkbenig’.

- Hoe wordt in dit bewijs gebruik gemaakt van ‘Lijst van definities/stellingen in de vlakke meetkunde voor vwo wiskunde D’?
- Loop dit bewijs zelf na. Zorg ervoor dat je elke stap begrijpt.

**Opgave 4**

In **Voorbeeld 1** wordt met behulp van congruentie bewezen dat  $\triangle RPQ$  rechthoekig is. Je kunt dit ook bewijzen door gebruik te maken van de (omgekeerde) stelling van Pythagoras.

- Schrijf  $a$  als de lengte van de zijden van het vierkant en bewijs dat  $PR^2 = QR^2 = \frac{1}{2}a^2$ .
- Bewijs dat  $PQ = a$ .
- Bewijs nu met behulp van de omgekeerde stelling van Pythagoras dat  $\triangle RPQ$  rechthoekig is.

### Voorbeeld 2

Bewijs:

‘Het middelpunt van een cirkel door de drie hoekpunten van een stomphoekige driehoek ligt niet binnen die driehoek.’

Antwoord

**Gegeven:**

$\Delta ABC$  met  $\angle BAC > 90^\circ$ .

$MA = MB = MC$ .

**Te bewijzen:**

$M$  ligt niet binnen  $\Delta ABC$ .

**Bewijs:** (indirect)

Stel de stelling is niet waar, dus  $M$  ligt binnen  $\Delta ABC$  en  $MA = MB = MC$ .

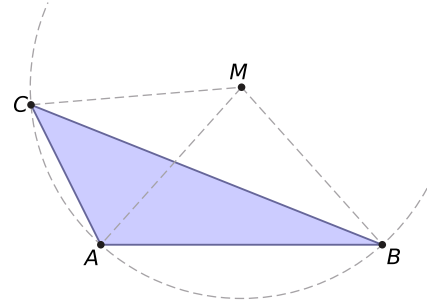
De driehoeken  $ABM$ ,  $BCM$  en  $CAM$  zijn dan gelijkbenig (stelling gelijkbenige driehoek).

Is nu  $\angle ABM = \angle BAM = \alpha$ ,  $\angle CBM = \angle BCM = \beta$  en  $\angle CAM = \angle ACM = \gamma$ , dan is  $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$  (hoekensom driehoek).

Dus  $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ , zodat  $\angle BAC = \alpha + \gamma < 90^\circ$ .

In tegenspraak met wat gegeven is. De stelling is dus waar.

Q.e.d.



Figuur 4

### Opgave 5

In **Voorbeeld 2** vind je een bewijs van een stelling over het middelpunt van een cirkel door de drie hoekpunten van een driehoek.

- a Hoe construeer je de cirkel door de drie hoekpunten van een driehoek?

In het computerprogramma GeoGebra kun je de figuren die je bij een bewijs vaak wilt tekenen, gemakkelijk zelf construeren. Vaak kun je dan nog allerlei punten, lijnen en cirkels verplaatsen en bekijken wat daarvan het effect is.

- b Construeer in GeoGebra nu een driehoek  $ABC$  en teken een cirkel door de drie hoekpunten. Bepaal het middelpunt  $M$  van die cirkel en bekijk wat er met  $M$  gebeurt als je de punten  $A$ ,  $B$  en/of  $C$  verplaatst. (Zo maak je zelf de applet in het voorbeeld.)
- c Kun je nog een andere vergelijkbare stelling formuleren en bewijzen?

### Voorbeeld 3

Je ziet hoe de kortste weg van punt  $A$  naar punt  $B$  via de beek wordt geconstrueerd door een loodlijn door  $B$  op de beek te trekken. Vervolgens een punt  $D$  te tekenen dat op die loodlijn en even ver van de beek ligt. Het snijpunt  $C$  van  $AD$  en de beek levert de kortste route  $AC + CB$ .

Bewijs dat deze constructie juist is.

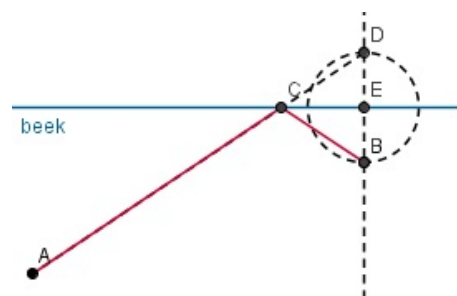
Antwoord

**Gegeven:**

Uit de constructie volgt dat  $BD$  loodrecht staat op de beek, dus  $\angle BEC = \angle DEC = 90^\circ$ . Verder is  $BE = ED$  en lijn  $AD$  een rechte lijn.

**Te bewijzen:**

$AC + CB$  is de kortste afstand van  $A$  naar  $B$  via de beek.



Figuur 5

**Bewijs:**

Uit de gegevens volgt meteen dat  $\triangle CBE$  en  $\triangle CDE$  congruent zijn (ZHZ).

Dus is  $CD = CB$ .

De punten  $A$ ,  $C$  en  $D$  liggen op de rechte lijn  $AD$  en dus is  $AC + CD$  de kortste afstand van  $A$  naar  $D$ . Immers als je via een ander punt dan  $C$  gaat, zeg  $C_1$ , dan is  $AD$  altijd korter dan  $AC_1 + C_1D$  (driehoeksongelijkheid).

Dus  $AC + CB = AC + CD$  is de kortste afstand.

Q.e.d.

**Opgave 6**

In **Voorbeeld 3** zie je het bewijs van de kortste verbinding via een lijn tussen twee punten  $A$  en  $B$  die aan dezelfde kant van die lijn liggen (maar er niet op).

Loop dit bewijs nog eens na, maak de constructie met GeoGebra.

**Opgave 7**

Gegeven is rechthoek  $ABCD$  met diagonaal  $AC$ . Bewijs dat de loodlijn uit punt  $D$  op  $AC$  gelijk is aan de loodlijn uit punt  $B$  op  $AC$ .

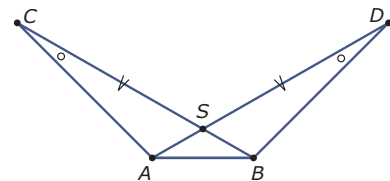
- Teken een geschikte figuur of construeer hem in GeoGebra. Teken beide loodlijnen erin, noem ze  $DE$  en  $BF$ .
- Welke lijnstukken in je figuur moeten nu gelijk zijn?
- Kun je geschikte congruente driehoeken vinden?
- Formuleer nu een volledig en duidelijk bewijs.

**Verwerken****Opgave 8**

In de figuur zie je twee driehoeken  $ABC$  en  $ABD$  getekend.

Verder is  $CS = DS$  en  $\angle C = \angle D$ .

Bewijs dat  $AS = BS$ .



Figuur 6

**Opgave 9**

Twee lijnstukken  $AB$  en  $CD$  zijn niet even lang en hebben een snijpunt  $S$  zo, dat  $AS = SB$  en  $CS = SD$ .

Bewijs dat  $AC$  evenwijdig is aan  $BD$ .

**Opgave 10**

In  $\triangle ABC$  is  $AB = AC$ .  $D$  is het midden van  $AB$ ,  $E$  het midden van  $AC$ .

Bewijs dat  $BE = CD$ .

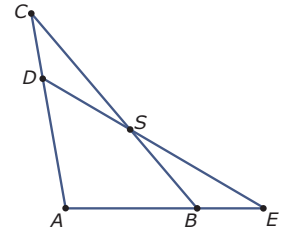
**Opgave 11**

Op een lijn liggen, in deze volgorde, de punten  $A$ ,  $D$ ,  $B$  en  $C$ .  $P$  is geen punt op die lijn. Verder is gegeven dat  $\angle APB = 2 \cdot \angle APD$ .

Bewijs dat  $\angle CPD = \frac{1}{2} \cdot (\angle CPB + \angle CPA)$ .

### Opgave 12

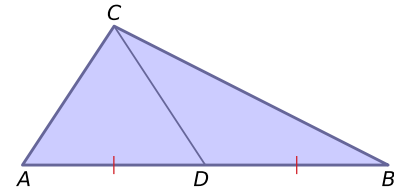
In de figuur zie je twee driehoeken  $ABC$  en  $AED$  getekend. Verder is  $AB = AD$  en  $AC = AE$ . Bewijs dat  $\angle C = \angle E$ .



Figuur 7

### Opgave 13

Gegeven is driehoek  $ABC$  waarbij  $\angle ACB$  een stompe hoek is en  $D$  het midden is van  $AB$ . Bewijs dat  $|CD| < \frac{1}{2} \cdot |AB|$ .

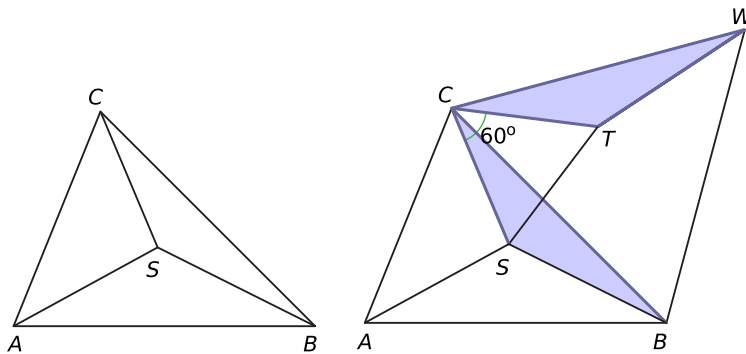


Figuur 8

## Toepassen

### Opgave 14: Het punt van Torricelli

Gegeven is een driehoek  $ABC$  waarvan de hoeken niet groter zijn dan  $120^\circ$ . In deze opgave ga je op zoek naar een punt  $S$  binnen de driehoek, zodanig dat  $|SA| + |SB| + |SC|$  minimaal is. Dit punt wordt ook wel het punt van Torricelli genoemd.



Figuur 9

- Als je driehoek  $BCS$   $60^\circ$  draait om  $C$  tegen de klok in, krijg je de rechter figuur. De driehoeken  $BCS$  en  $WCT$  zijn dus congruent. Bewijs dat het gezochte punt  $S$  op lijnstuk  $AW$  moet liggen.
- Je weet nu dat punt  $S$  op lijnstuk  $AW$  moet liggen. Geef door middel van een constructie aan waar dit punt moet liggen.

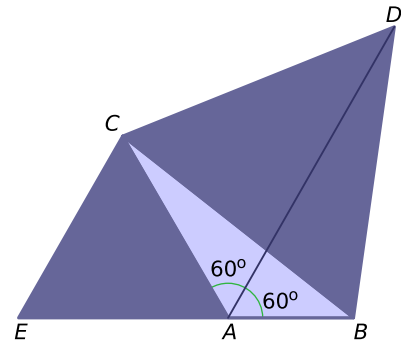
### Opgave 15: Vanuit een stomphoekige driehoek

Gegeven is  $\triangle ABC$ . Op zijde  $BC$  is de gelijkzijdige driehoek  $CBD$  getekend. Lijnstuk  $AD$  verdeelt  $\angle CAB$  in twee hoeken van  $60^\circ$ .

Op zijde  $AC$  is  $\triangle EAC$  getekend met  $EA = AC$  en  $E$  ligt op het verlengde van  $BA$ .

Bewijs dat  $AD = AB + AC$ .

(naar: examen vwo wiskunde B in 2013, eerste tijdvak)



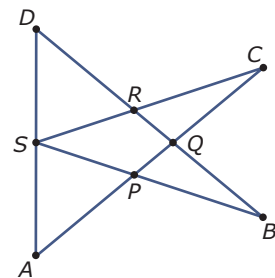
Figuur 10

## Testen

### Opgave 16

In de figuur hiernaast is gegeven  $\angle A = \angle D$ ,  $\angle B = \angle C$  en punt  $S$  is het midden van lijnstuk  $AD$ .

Bewijs dat  $AC = BD$ .



Figuur 11

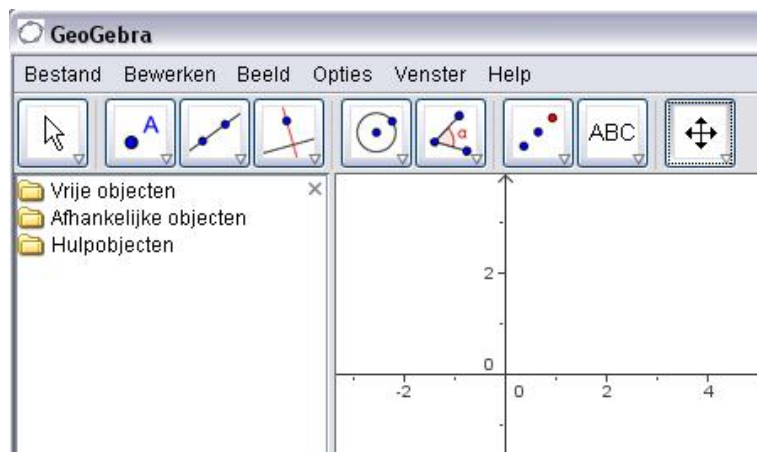
### Opgave 17

Bewijs dat in een gelijkbenige driehoek de lijnstukken vanuit de hoeken tegenover de gelijke benen en loodrecht op die benen even lang zijn.

## Practicum: GeoGebra I

Bij vlakke meetkunde kun je constructies uitvoeren met behulp van **GeoGebra**. Je kunt dit (gratis) downloaden via [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org). Installeer GeoGebra eerst, of werk online. Voor de iPad is er een GeoGebra-app.

Met dit programma maak je constructies m.b.v. de knoppen die je hier in beeld ziet. Links zie je het algebra-venster met daarin alle objecten die je maakt. Rechts zie je het tekenvenster waarin je de objecten plaatst en construeert. Je kunt met of zonder rooster en/of assen werken, via het menu 'Beeld' zet je ze aan of uit.



Figuur 12

Van elk object kun je door er met de rechter muisknop op te klikken allerlei eigenschappen aanpassen (kleur, dikte, etc.), de naam en de waarde aan/uitzetten, het object wel of niet tonen, etc. Je kunt geen bewijzen leveren met GeoGebra, wel bekijken welke eigenschappen een figuur blijft houden ook als je punten, lijnen, cirkels verplaatst of draait. Zo krijg je vermoedens die je dan weer moet bewijzen...





© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: [f.spijkers@math4all.nl](mailto:f.spijkers@math4all.nl)

Met de Math4All Foliostaat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij [a.f.otten@math4all.nl](mailto:a.f.otten@math4all.nl) een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.

---

