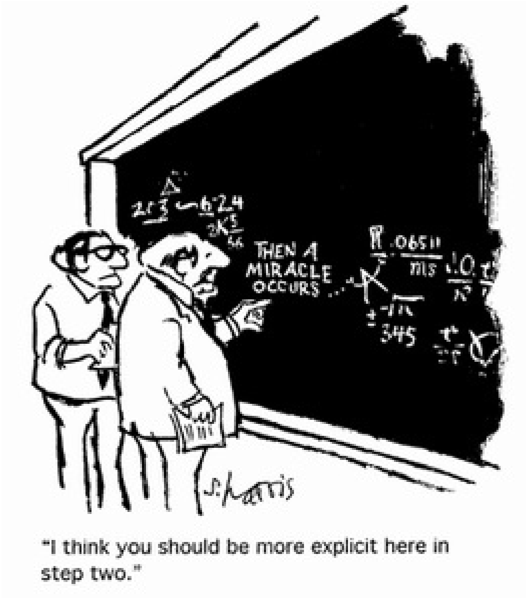
1.3 Bewijzen

Inleiding

Een bewijs in de wiskunde is een logische redenering waarmee wordt aangetoond dat een bepaalde bewering volgt uit de (voor waar aangenomen) axioma's en uit eerder bewezen stellingen. Die bewering wordt (als een bewijs is geleverd) dan een stelling en toegevoegd aan het theoretische bouwwerk (zoals de vlakke meetkunde). Elk bewijs kent een vaste structuur. Verder moet je goed afspreken van welke theorie je mag uitgaan.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- een bewijs leveren volgens een vaste structuur;
- bewijzen leveren met behulp van de lijst van definities/stellingen in de Vlakke Meetkunde voor vwo wiskunde B.

Voorkennis

- eenvoudige bewijzen leveren vanuit de basisdefinities en axioma's van de vlakke meetkunde.
- gebruik maken van congruentie en de congruentiekenmerken van driehoeken.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de **Lijst van definities en stellingen voor vlakke meetkunde**. Probeer door alleen gebruik te maken van die lijst de volgende stelling te bewijzen:

Een driehoek waarvan de hoekpunten de middens zijn van drie zijden van een vierkant is rechthoekig en gelijkbenig.

Uitleg

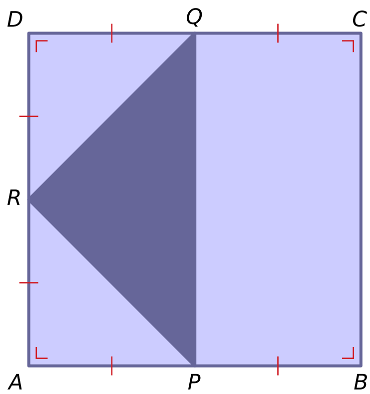
Bekijk de applet

In deze figuur is een vierkant $ABCD$ geconstrueerd. De punten P, Q en R zijn de middens van drie zijden van het vierkant. Je ‘ziet’ dat ΔPQR een gelijkbenige rechthoekige driehoek is.

Het volgende ‘vermoeden’ ontstaat:

> ‘Een driehoek waarvan de hoekpunten de middens zijn van drie zijden van een vierkant is rechthoekig en gelijkbenig.’

Maar kun je dat ook echt bewijzen?



Figuur 2

Om zo'n bewering (vermoeden) te bewijzen is het verstandig om eerst de gegevens netjes op een rijtje te zetten en letters in te voeren. In de figuur is dat al gedaan. Er geldt: $ABCD$ is vierkant en $AP = PB$, $CQ = QD$ en $DR = RA$. Voor het gemak zijn de absoluutstrepen weggelaten.

Te bewijzen is nu dat $PR = QR$ en $\angle PRQ = 90°$.
Nu kun je over het bewijs gaan nadenken.

Ga uit van de **Lijst van definities en stellingen voor vlakke meetkunde**.

Bij bewijzen in de vlakke meetkunde kun je vaak goed gebruik maken van ‘GeoGebra’, een computerprogramma dat je gratis kunt downloaden en speciaal bedoeld is voor de vlakke meetkunde.

Opgave 1

In de uitleg wordt de bewijsstructuur ‘Gegeven, te bewijzen, bewijs’ ingeleid.

a Wat is het verschil tussen de stelling zelf en de beschrijving ervan onder de kopjes ‘Gegeven’ en ‘Te bewijzen’?

b Wat is het belang van zo'n vaste bewijsstructuur?

Opgave 2

In de uitleg wordt een begin gemaakt met het bewijs van de stelling: ‘Een driehoek waarvan de hoekpunten de middens zijn van drie zijden van een vierkant is rechthoekig en gelijkbenig.’

a Laat zien dat de driehoeken APR en DQR congruent zijn.

b Leg uit hoe je daaruit het bewijs levert.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **bewijs** is een logische redenering waarin je laat zien hoe een bepaalde bewering uit de al bestaande axioma's en definities en eerder bewezen stellingen volgt. Als het bewijs is geleverd wordt de bewering een **stelling**. Je uitgangspunt is de **Lijst van definities en stellingen voor vlakke meetkunde**. Je moet door alleen gebruik te maken van die lijst alle stellingen bewijzen. Gebruik de volgende structuur voor een bewijs:

Gegeven:

- Beknopte en duidelijke beschrijving van wat er gegeven is, vaak met een duidelijke figuur erbij. Kies alvast letters voor punten, lijnen, e.d.

Te bewijzen:

- Beknopte en duidelijke beschrijving van wat je wilt bewijzen. Gebruik de gekozen letters.

Bewijs:

- Het eigenlijke bewijs met verwijzingen naar de boven genoemde lijst van definities en stellingen voor vlakke meetkunde.

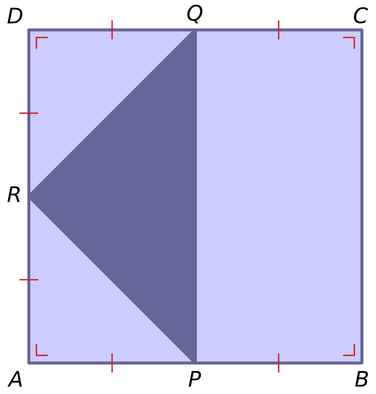
Er zijn meerdere manieren om bewijzen te leveren. Twee belangrijke zijn:

- een **direct bewijs** waarbij je rechtstreeks vanuit de gegeven lijst van definities en stellingen redeneert en laat zien dat het vermoeden daaruit volgt;
- een **indirect bewijs** of **bewijs uit het ongerijmde** waarin je aanneemt dat het vermoeden niet waar is en laat zien dat dit in tegenspraak is met de lijst van definities en stellingen.

Voorbeeld 1

In een opgave in de **Uitleg** heb je het volgende bewezen:
Een driehoek waarvan de hoekpunten de middens zijn van drie zijden van een vierkant is rechthoekig en gelijkbenig.

Zet dit bewijs in de structuur van Gegeven, Te bewijzen, Bewijs.



Figuur 3

Antwoord

Gegeven:
Zie figuur; er zijn letters ingevoerd, de streepjes geven gelijke lijnstukken aan. $ABCD$ is een vierkant.
$AP = PB$, $CQ = QD$ en $DR = RA$

Te bewijzen:
$PR = QR$ en $\angle PRQ = 90°$

Bewijs:
Omdat $AP = QD$ (halve zijde van vierkant $ABCD$), $DR = RA$ (gegeven) en $\angle A = \angle D = 90°$ zijn driehoeken APR en DQR congruent (ZHZ).
Dus is: $PR = QR$
Omdat zowel ΔAPR als ΔDQR gelijkbenig en rechthoekig is, is: $\angle ARP = \angle DRQ = 45°$ (hoekensom driehoek)
Dus is: $\angle PRQ = 180 - 45 - 45 = 90°$

Q.e.d.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je een bewijs van de stelling: 'Een driehoek waarvan de hoekpunten de middens zijn van drie zijden van een vierkant is rechthoekig en gelijkbenig'.

a Hoe wordt in dit bewijs gebruik gemaakt van 'Lijst van definities/stellingen in de vlakke meetkunde voor vwo wiskunde D'?

b Loop dit bewijs zelf na. Zorg ervoor dat je elke stap begrijpt.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** wordt met behulp van congruentie bewezen dat ΔRPQ rechthoekig is. Je kunt dit ook bewijzen door gebruik te maken van de (omgekeerde) stelling van Pythagoras.

a Schrijf a als de lengte van de zijden van het vierkant en bewijs dat $PR^2 = QR^2 = \frac{1}{2}a^2$.

b Bewijs dat $PQ = a$.

c Bewijs nu met behulp van de omgekeerde stelling van Pythagoras dat ΔRPQ rechthoekig is.

Voorbeeld 2

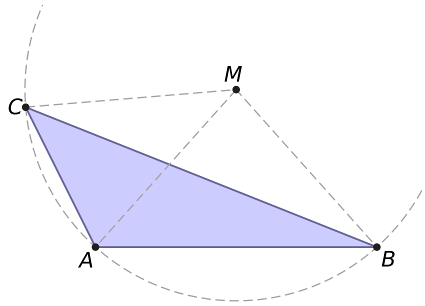
Bewijs:
Het middelpunt van een cirkel door de drie hoekpunten van een stomphoekige driehoek ligt niet binnen die driehoek.

Antwoord

Gegeven:
ΔABC met $\angle BAC > 90°$.
$MA = MB = MC$.

Te bewijzen:
M ligt niet binnen ΔABC.

Bewijs: (indirect)
Stel de stelling is niet waar, dus M ligt binnen ΔABC en $MA = MB = MC$
De driehoeken ABM, BCM en CAM zijn dan gelijkbenig (stelling gelijkbenige driehoek).



Figuur 4

Is nu $\angle ABM = \angle BAM = \alpha$, $\angle CBM = \angle BCM = \beta$ en $\angle CAM = \angle ACM = \gamma$, dan is $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$ (hoekensom driehoek).
Dus $\alpha + \beta + \gamma = 90°$, zodat $\angle BAC = \alpha + \gamma < 90°$.

In tegenspraak met wat gegeven is. De stelling is dus waar.

Q.e.d.

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** vind je een bewijs van een stelling over het middelpunt van een cirkel door de drie hoekpunten van een driehoek.

a Hoe construeer je de cirkel door de drie hoekpunten van een driehoek?

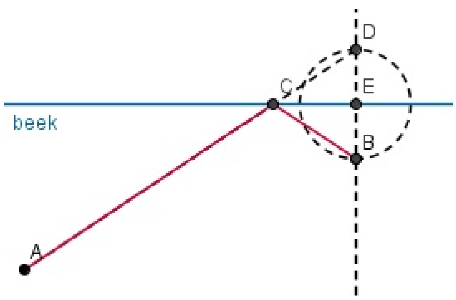
In het computerprogramma GeoGebra kun je de figuren die je bij een bewijs vaak wilt tekenen, gemakkelijk zelf construeren. Vaak kun je dan nog allerlei punten, lijnen en cirkels verplaatsen en bekijken wat daarvan het effect is.

b Construeer in GeoGebra nu een driehoek ABC en teken een cirkel door de drie hoekpunten. Bepaal het middelpunt M van die cirkel en bekijk wat er met M gebeurt als je de punten A, B en/of C verplaatst. (Zo maak je zelf de applet in het voorbeeld.)

c Kun je nog een andere vergelijkbare stelling formuleren en bewijzen?

Voorbeeld 3

Je ziet hoe de kortste weg van punt A naar punt B via de beek wordt geconstrueerd door een loodlijn door B op de beek te trekken. Vervolgens een punt D te tekenen dat op die loodlijn en even ver van de beek ligt. Het snijpunt C van AD en de beek levert de kortste route $AC + CB$.
Bewijs dat deze constructie juist is.



Figuur 5

Antwoord

Gegeven:
Uit de constructie volgt dat BD loodrecht staat op de beek, dus $\angle BEC = \angle DEC = 90°$. Verder is $BE = ED$ en lijn AD een rechte lijn.

Te bewijzen:
$AC + CB$ is de kortste afstand van A naar B via de beek.

Bewijs:
Uit de gegevens volgt meteen dan ΔCBE en ΔCDE congruent zijn (ZHZ).
Dus is $CD = CB$.
De punten A, C en D liggen op de rechte lijn AD en dus is $AC + CD$ de kortste afstand van A naar D. Immers als je via een ander punt dan C gaat, zeg C_1, dan is AD altijd korter dan $AC_1 + C_1D$ (driehoeksongelijkheid).
Dus $AC + CB = AC + CD$ is de kortste afstand.
Q.e.d.

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** zie je het bewijs van de kortste verbinding via een lijn tussen twee punten A en B die aan dezelfde kant van die lijn liggen (maar er niet op).

Loop dit bewijs nog eens na, maak de constructie met GeoGebra.

Opgave 7

Gegeven is rechthoek $ABCD$ met diagonaal AC. Bewijs dat de loodlijn uit punt D op AC gelijk is aan de loodlijn uit punt B op AC.

a Teken een geschikte figuur of construeer hem in GeoGebra. Teken beide loodlijnen erin, noem ze DE en BF.

b Welke lijnstukken in je figuur moeten nu gelijk zijn?

c Kun je geschikte congruente driehoeken vinden?

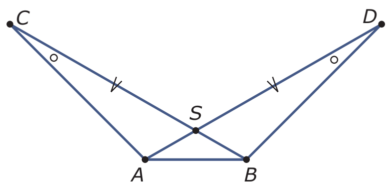
d Formuleer nu een volledig en duidelijk bewijs.

Verwerken

Opgave 8

In de figuur zie je twee driehoeken ABC en ABD getekend.
Verder is $CS = DS$ en $\angle C = \angle D$.

Bewijs dat $AS = BS$.



Figuur 6

Opgave 9

Twee lijnstukken AB en CD zijn niet even lang en hebben een snijpunt S zo, dat $AS = SB$ en $CS = SD$.

Bewijs dat AC evenwijdig is aan BD.

Opgave 10

In ΔABC is $AB = AC$. D is het midden van AB, E het midden van AC.

Bewijs dat $BE = CD$.

Opgave 11

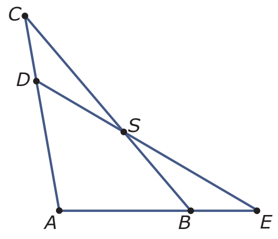
Op een lijn liggen, in deze volgorde, de punten A, D, B en C. P is geen punt op die lijn. Verder is gegeven dat $\angle APB = 2 \cdot \angle APD$.

Bewijs dat $\angle CPD = \frac{1}{2} \cdot (\angle CPB + \angle CPA)$.

Opgave 12

In de figuur zie je twee driehoeken ABC en AED getekend.
Verder is $AB = AD$ en $AC = AE$.

Bewijs dat $\angle C = \angle E$.

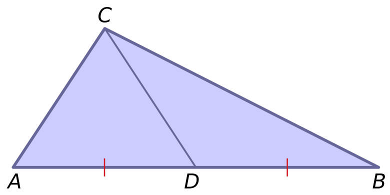


Figuur 7

Opgave 13

Gegeven is driehoek ABC waarbij $\angle ACB$ een stompe hoek is en D het midden is van AB.

Bewijs dat $|CD| < \frac{1}{2} \cdot |AB|$.

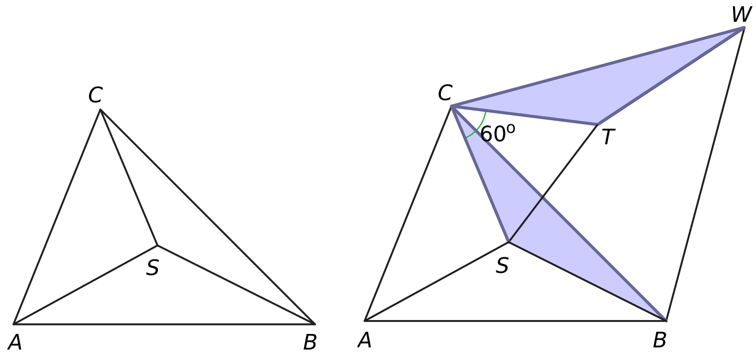


Figuur 8

Toepassen

Opgave 14: Het punt van Torricelli

Gegeven is een driehoek ABC waarvan de hoeken niet groter zijn dan 120°. In deze opgave ga je op zoek naar een punt S binnen de driehoek, zodanig dat $|SA| + |SB| + |SC|$ minimaal is. Dit punt wordt ook wel het punt van Torricelli genoemd.



Figuur 9

a Als je driehoek BCS 60° draait om C tegen de klok in, krijg je de rechter figuur. De driehoeken BCS en WCT zijn dus congruent.

Bewijs dat het gezochte punt S op lijnstuk AW moet liggen.

b Je weet nu dat punt S op lijnstuk AW moet liggen. Geef door middel van een constructie aan waar dit punt moet liggen.

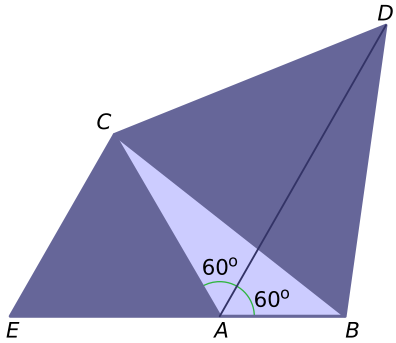
Opgave 15: Vanuit een stomphoekige driehoek

Gegeven is ΔABC. Op zijde BC is de gelijkzijdige driehoek CBD getekend. Lijnstuk AD verdeelt $\angle CAB$ in twee hoeken van 60°.

Op zijde AC is ΔEAC getekend met $EA = AC$ en E ligt op het verlengde van BA.

Bewijs dat $AD = AB + AC$.

(naar: examen vwo wiskunde B in 2013, eerste tijdvak)



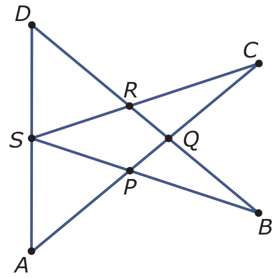
Figuur 10

Testen

Opgave 16

In de figuur hiernaast is gegeven $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$ en punt S is het midden van lijnstuk AD.

Bewijs dat $AC = BD$.



Figuur 11

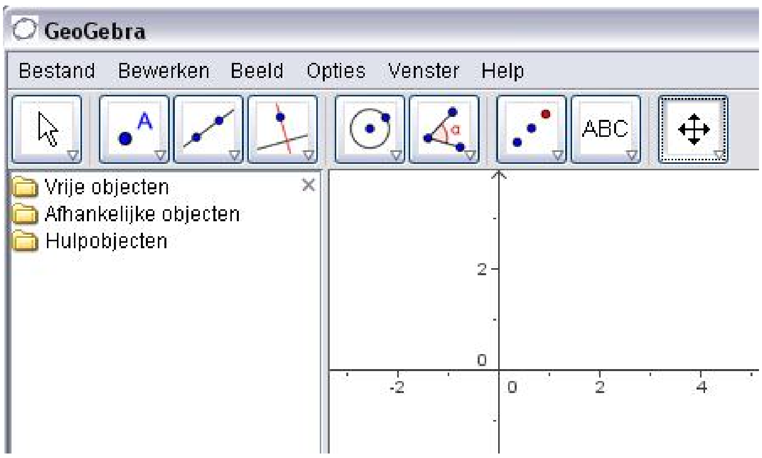
Opgave 17

Bewijs dat in een gelijkbenige driehoek de lijnstukken vanuit de hoeken tegenover de gelijke benen en loodrecht op die benen even lang zijn.

Practicum: GeoGebra I

Bij vlakke meetkunde kun je constructies uitvoeren met behulp van **GeoGebra**. Je kunt dit (gratis) downloaden via **www.geogebra.org**. Installeer GeoGebra eerst, of werk online. Voor de iPad is er een GeoGebra-app.

Met dit programma maak je constructies m.b.v. de knoppen die je hier in beeld ziet. Links zie je het algebravenster met daarin alle objecten die je maakt. Rechts zie je het tekenvenster waarin je de objecten plaatst en construeert. Je kunt met of zonder rooster en/of assen werken, via het menu 'Beeld' zet je ze aan of uit.



Figuur 12

Van elk object kun je door er met de rechter muisknop op te klikken allerlei eigenschappen aanpassen (kleur, dikte, etc.), de naam en de waarde aan/uitzetten, het object wel of niet tonen, etc. Je kunt geen bewijzen leveren met GeoGebra, wel bekijken welke eigenschappen een figuur blijft houden ook als je punten, lijnen, cirkels verplaatst of draait. Zo krijg je vermoedens die je dan weer moet bewijzen...

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@xs4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.