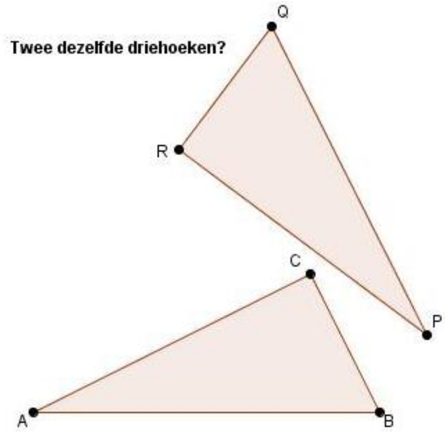
1.2 Congruentie

Inleiding

Bij het leveren van meetkundige bewijzen wil je vaak aantonen welke verschillende (delen van) figuren hetzelfde zijn. Figuren die qua vorm en afmeting gelijk zijn noem je congruent. Ze hebben dan dezelfde hoeken en afmetingen. Omdat veel figuren in driehoeken zijn te verdelen is het voor bewijzen belangrijk om te weten wanneer driehoeken congruent zijn.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- werken met de congruentiekenmerken van driehoeken;
- bewijzen leveren met behulp van congruente driehoeken;
- de eigenschappen van bijzondere driehoeken gebruiken;
- de driehoeksongelijkheid toepassen.

Voorkennis

- eenvoudige bewijzen leveren vanuit basisdefinities en axioma's van de meetkunde.

Verkennen

Opgave V1

Er zijn precies vijf verschillende situaties waarin je een driehoek precies kunt tekenen en er ook maar ééntje mogelijk is.
Eén daarvan is ZZZ: de drie zijden zijn gegeven.

a Laat zien dat bij drie gegeven zijden er ook maar één driehoek is te tekenen door hem te construeren. Neem als lengtes van zijden $|AB| = 6$, $|BC| = 3$ en $|AC| = 4$.

b Lukt dit bij elke willekeurige set van drie getallen?

Een andere situatie is ZHZ: twee zijden en de hoek ertussen zijn gegeven.

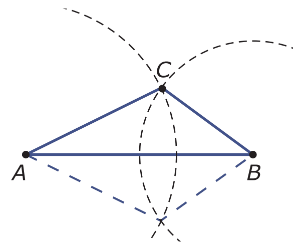
c Laat ook nu zien dat er zo maar één driehoek te construeren is. Neem $\angle A = 60°$, $|AB| = 6$ en $|AC| = 8$.

d Bedenk zelf de andere drie situaties.

e Waarom is ZZH niet zo'n situatie?

Uitleg

Als van een driehoek de drie zijden (bijvoorbeeld $|AB| = 6$, $|BC| = 3$ en $|AC| = 4$) zijn gegeven, kun je hem construeren. Er zijn dan twee driehoeken op AB mogelijk. In de constructie kun je zien dat die qua vorm en afmetingen gelijk zijn. Het zijn ‘congruente driehoeken’. Als twee driehoeken gelijke zijden hebben, zijn ze altijd congruent. Deze eigenschap van driehoeken heet een ‘congruentiekenmerk’.
De congruentiekenmerken voor driehoeken zijn:



Figuur 2

- drie gelijke zijden (ZZZ);
- twee zijden en de ingesloten hoek (ZHZ);
- twee hoeken en de zijde ertussen (HZH);

- een zijde, een hoek op die zijde en de overstaande hoek (ZHH);
- twee zijden en de rechte hoek tegenover één van die zijden (ZZR).

De drie letters gebruik je in bewijzen om het congruentiekenmerk weer te geven. Dat ΔABC en ΔPQR congruent zijn, geef je zo weer $\Delta ABC \cong \Delta PQR$.
Ga zelf na, dat je in alle vijf gevallen precies één driehoek kunt construeren (of twee congruente). Met behulp van deze congruentiekenmerken kun je allerlei eigenschappen van bijzondere driehoeken bewijzen. Daarin geef je hoeken vaak aan met behulp van drie letters. $\angle ABC$ is de hoek met hoekpunt B en benen BA en BC.

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je dat er vijf congruentiekenmerken zijn. Bij deze kenmerken gaat het steeds om de hoeken en/of lijnen die twee driehoeken gelijk hebben.

a Waarom is HHH geen congruentiekenmerk?

b ZZR is een congruentiekenmerk, maar ZZH niet. Ga na waarom je niet een driehoek ABC vastlegt door te zeggen: $|AB| = 5$ cm, $|AC| = 4$ cm en $\angle ABC = 45°$.

Opgave 2

Je ziet in de **Uitleg** hoe je een driehoek construeert als de drie zijden zijn gegeven. Die constructie hoort bij congruentiekenmerk ZZZ.

Geef een voorbeeld van een constructie die hoort bij HZH. Beschrijf mogelijke gegevens en voer de constructie uit.

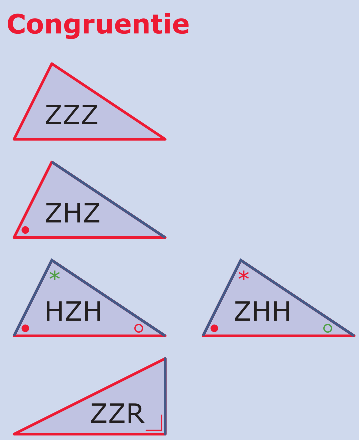
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Twee driehoeken zijn **congruent** als ze gelijk hebben:

- drie zijden (ZZZ);
- twee zijden en de ingesloten hoek (ZHZ);
- twee hoeken en de zijde ertussen (HZH);
- een zijde, een hoek op die zijde en de overstaande hoek (ZHH);
- twee zijden en de rechte hoek tegenover één van die zijden (ZZR).

Je noemt dit de **congruentiekenmerken** van driehoeken. Dat ΔABC en ΔPQR congruent zijn geef je zo weer: $\Delta ABC \cong \Delta PQR$. Let bij het noteren van congruente driehoeken op de volgorde van de letters.



Figuur 3

Met behulp van congruentie kun je allerlei eigenschappen van (bijzondere) driehoeken bewijzen. Bijvoorbeeld:

- In elke **rechthoekige driehoek** (een driehoek met een rechte hoek) is de stelling van Pythagoras toepasbaar. Dus als de rechthoekszijden lengtes van a en b hebben en de hypotenusa (schuine zijde) heeft lengte c, dan is $a^2 + b^2 = c^2$.
- Als in een driehoek met zijden a,b en c geldt dat $a^2 + b^2 = c^2$, dan is het een rechthoekige driehoek (omgekeerde stelling van Pythagoras).
- In elke **gelijkbenige driehoek** (een driehoek met twee gelijke zijden) zijn de basishoeken tegenover de even lange zijden even groot.
- In elke **gelijkzijdige driehoek** (een driehoek met drie gelijke zijden) zijn alle hoeken even groot.

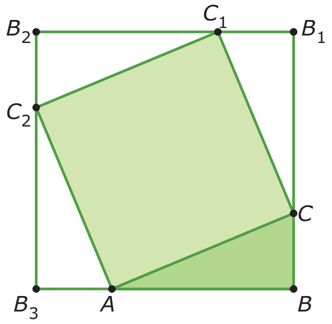
Tenslotte is bij driehoeken nog van belang dat elke zijde van een driehoek altijd kleiner is dan de som van de twee andere. Dit heet de **driehoeksongelijkheid**: Voor drie punten A, B en C, die niet op één lijn liggen, geldt: $|AB| + |BC| > |AC|$

Let op. In congruente driehoeken moet de volgorde van de letters overeenkomen met de congruentie.

Voorbeeld 1

Je ziet een figuur waarmee je de stelling van Pythagoras kunt bewijzen in de rechthoekige driehoek ABC.

Eerst wordt een vierkant op zijde AC geconstrueerd. Daarna wordt de driehoek om P (het snijpunt van de diagonalen van het vierkant) over 90° gedraaid. Als je dit drie keer doet, ontstaan vier congruente rechthoekige driehoeken.
Belangrijk is dat vanwege de congruentie van de vier driehoeken bij de punten C, C_1, C_2 en A gestrekte hoeken ontstaan.
Dit komt omdat congruente driehoeken gelijke hoeken hebben.



Figuur 4

Vanwege de congruentie geldt: $\angle CAB = \angle C_1CB_1$

Verder geldt: $\angle CAB + 90° + \angle BCA = 180°$ (hoekensom driehoek) en dus $\angle CAB + \angle BCA = 90°$.

Uit bovenstaande volgt nu dat $\angle BCA + 90° + \angle C_1CB_1 = 180°$, dus de drie hoeken vormen een gestrekte hoek. Op dezelfde manier toon je aan dat dit ook geldt bij de drie hoeken bij de punten C_1,C_2 en A.

Nu weet je dat $BB_1B_2B_3$ een vierkant is met zijden van $a+b$.
Verder is C_1C_2AC een vierkant met zijden c.

En ten slotte heeft elk van de vier rechthoekige driehoeken een oppervlakte van $\frac{1}{2}ab$.

Ga nu zelf na dat uit $(a+b)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2$ volgt dat $a^2 + b^2 = c^2$.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** wordt een bewijs voor de stelling van Pythagoras geleverd.

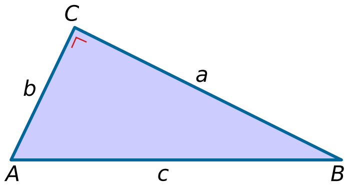
a Waarom moet worden aangetoond dat $BB_1B_2B_3$ een vierkant is?

b Ga de laatste regel van het bewijs ook inderdaad zelf na.

Voorbeeld 2

In ΔABC geldt: $a^2 + b^2 = c^2$.
Bewijs nu dat deze driehoek rechthoekig is.

Dit wordt ook wel de omgekeerde stelling van Pythagoras genoemd.



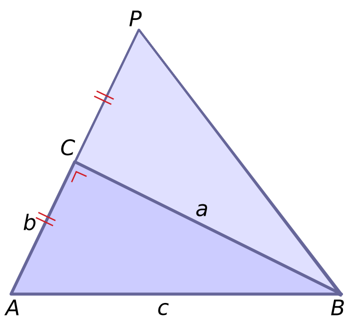
Figuur 5

Antwoord

Construeer op ΔABC een rechthoekige ΔCBP waarvan $\angle BCP = 90°$ en bovendien $|CP| = |CA| = b$.

In ΔCBP geldt: $(|CB|)^2 + (|CP|)^2 = (|BP|)^2$ (stelling van Pythagoras).
En dus is $(|BP|)^2 = b^2 + a^2 = c^2$ en $|BP| = |AB|$.

Daarom zijn de twee driehoeken ABC en PBC congruent (ZZZ).
En dus is $\angle ACB = \angle BCP = 90°$.



Figuur 6

Opgave 4

In **Voorbeeld 2** wordt de omgekeerde stelling van Pythagoras bewezen.

a Van welk congruentiekenmerk wordt gebruikgemaakt?

b Bewijs dat een driehoek met zijden van 16, 30 en 34 cm rechthoekig is.

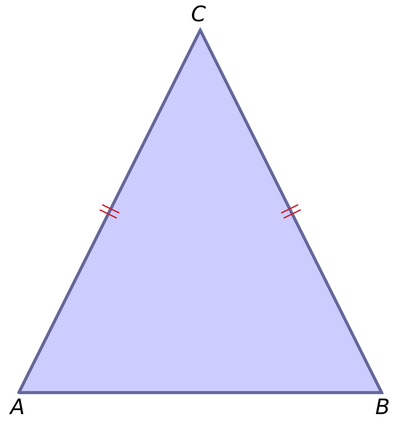
Gegeven is ΔABC met $|AB| = 10$ en $|BC| = 24$.

c Als je wilt dat de driehoek rechthoekig is, welke lengte moet AC dan krijgen?

d Is er nog een andere lengte mogelijk voor AC?

Voorbeeld 3

ΔABC is gelijkbenig, want de driehoek heeft twee gelijke zijden AC en BC.
Bewijs nu dat hij twee gelijke hoeken heeft.



Figuur 7

Antwoord

Teken de loodlijn CD op AB.
Bekijk de twee driehoeken ADC en BDC.
Hiervan is: $|AC| = |BC|$, $|CD| = |CD|$ en $\angle BDC = \angle ADC = 90°$.
En dus is ΔADC congruent met ΔBDC (ZZR). Daarom is $\angle A = \angle B$.

Je kunt dit ook bewijzen door aan te tonen dat ΔABC congruent is met ΔBAC (ZZZ).
Bedenk zelf hoe dan het bewijs precies verloopt.

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 3** het bewijs dat een gelijkbenige driehoek twee gelijke hoeken heeft.

In het antwoord staat een tweede manier beschreven om dit bewijs te leveren. Schrijf op hoe dit tweede bewijs verloopt.

Opgave 6

Bewijs: ‘Elke gelijkbenige rechthoekige driehoek heeft twee hoeken van 45°.’

Opgave 7

Bewijs met behulp van congruentie de stelling: ‘Als in een driehoek twee hoeken gelijk zijn, dan is die driehoek gelijkbenig.’

Voorbeeld 4

Gegeven is ΔABC met $\angle A > \angle B$.

Bewijs dat tegenover de grootste hoek ook de langste zijde zit, dus $|BC| > |AC|$.

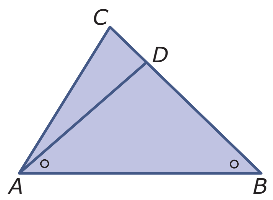
Antwoord

Teken een geschikte figuur. Teken op BC een punt D, zo, dat $\angle BAD = \angle ABD$.

Omdat $\angle BAD = \angle ABD$ is ΔABD gelijkbenig en dus: $|AD| = |BD|$

Vanwege de driehoeksongelijkheid is: $|AC| < |AD| + |DC| = |BD| + |DC| = |BC|$

Dus er geldt: $|BC| > |AC|$



Figuur 8

Opgave 8

In **Voorbeeld 4** is bewezen dat in een driehoek de grootste hoek altijd tegenover de langste zijde zit. Geldt ook dat de langste zijde altijd tegenover de grootste hoek zit? Onderzoek dit en geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

Opgave 9

De afstand van een punt P tot een lijn l is de lengte van het kortste verbindingslijnstuk van P en een punt Q op die lijn l.

Bewijs met behulp van de stelling van Pythagoras dat dit kortste verbindingslijnstuk PQ een rechte hoek met lijn l maakt.

Verwerken

Opgave 10

In een vierkant $ABCD$ zijn de twee diagonalen AC en BD getrokken. Hun snijpunt is S.

a Bewijs dat de driehoeken ABD en ABC congruent zijn.

b Bewijs dat de driehoeken ABS en CDS congruent zijn.

c Bewijs dat S het midden is van AC en van BD.

Opgave 11

Een driehoek heeft een zijde van 8 cm en een zijde van 5 cm.

a Kan de derde zijde 13 cm zijn? Wat kun je zeggen over de lengte van de derde zijde?

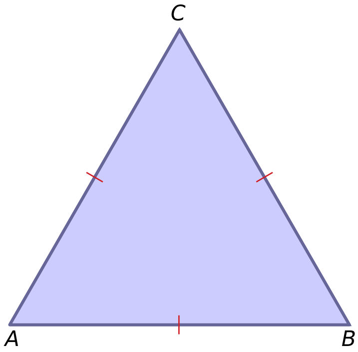
Een andere driehoek heeft een zijde met een lengte van 1 m.

b Wat kun je zeggen over de som van de lengtes van de andere zijden? En over hun verschil?

Opgave 12

Je ziet de gelijkzijdige driehoek ABC. Dit betekent dat de drie zijden even lang zijn.

Bewijs dat de driehoek drie gelijke hoeken van 60° heeft.



Figuur 9

Opgave 13

Bewijs dat de omtrek van een vierhoek groter is dan de som van de lengtes van de diagonalen.

Opgave 14

Definitie: 'De afstand tussen twee evenwijdige lijnen is de lengte van een loodlijn die je vanuit een punt op de ene lijn op de andere lijn neerlaat'.
Daar is nog wel wat op aan te merken. Maakt het niets uit waar je dat punt kiest? Maakt het niets uit op welk van de twee lijnen je dat punt kiest? En is dat dan echt de kortste afstand van alle lijnstukjes tussen de twee lijnen?
Noem de lijnen l en m.

a Bewijs: als P een punt op l is en PQ de loodlijn vanuit P op m, dan is QP de loodlijn vanuit Q op l.

b Bewijs: als P' een (ander) punt is op l en $P'Q'$ de loodlijn vanuit P' op m, dan zijn PQ en $P'Q'$ even lang (gebruik een hulplijn).

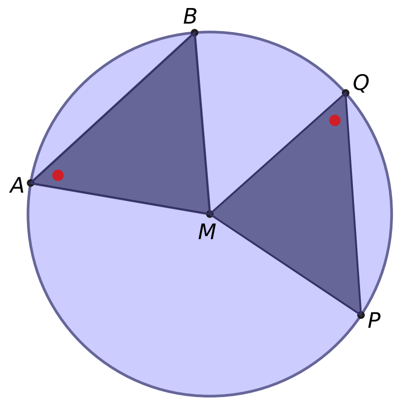
c Waarom kun je nu de definitie goedkeuren?

d Is de zo gedefinieerde afstand tussen twee evenwijdige lijnen ook de kleinst mogelijke afstand tussen een punt op de ene en een punt op de andere lijn? Geef een bewijs. Gebruik de stelling van Pythagoras.

Opgave 15

Je ziet een cirkel met middelpunt M. De punten A,B,P en Q liggen op de cirkel. Verder is gegeven dat $\angle BAM = \angle PQM$.

Bewijs dat $\Delta BAM \cong \Delta PQM$.



Figuur 10

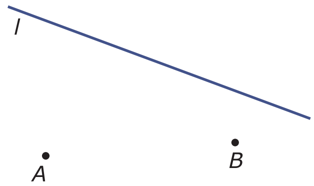
Toepassen

Opgave 16: Kortste weg

Je wilt de kortste weg van A naar B via een punt op lijn l tekenen.

a Neem de figuur over en teken die kortste weg.

b Bewijs dat dit inderdaad de kortste weg is. Gebruik de driehoeksongelijkheid.



Figuur 11

Opgave 17: Rechthoekige driehoeken met gehele zijden

Gegeven is een rechthoekige driehoek ABC met $\angle B = 90°$.

De lengtes van de zijden van de driehoek zijn geheel.

a Stel dat $|AC| = 50$. Welke driehoeken zijn er mogelijk? Geef ook aan welke driehoeken congruent zijn.

b Stel dat $|AB| = 3$. Waarom is er nu maar één driehoek mogelijk?

Opgave 18: Stomphoekige driehoek

Gegeven zijn twee gehele getallen a en b met $0 < a < b < 100$. De driehoek waarvan de zijden de lengte a,b en 100 hebben, is stomphoekig.

Wat is de grootste waarde die a kan hebben?

Testen

Opgave 19

Van ΔABC is gegeven: $|AC| = |BC|$. D is het midden van AC en E is het midden van BC.

Bewijs dat de loodlijnen vanuit D en vanuit E op AB even lang zijn.

Opgave 20

Van de vierhoek $ABCD$ is gegeven: $|AB| = |CD|$, $|AD| = |BC|$ en $\angle ABC = 90°$.

a Laat met een hulplijn zien: de vier hoeken zijn samen 360°.

b Bewijs dat $\angle ADC = 90°$.

c Bewijs dat $\angle BAD = \angle BCD = 90°$.

d Bewijs dat de twee diagonalen even lang zijn.

e Bewijs dat $\angle BAC = \angle ABD = \angle ACD = \angle BDC$.

f Bewijs dat de diagonalen elkaar doormidden delen.

Opgave 21

In een rechthoekige driehoek (de rechte hoek bij A) is D een punt op BC zo, dat $\angle DAB = \angle DBA$. (Maak zelf een tekening).

a Laat zien dat $\angle ACB = 90° - \angle CBA$.

b Laat zien dat ΔDCA gelijkbenig is.

c Bewijs dat $|AD| = |DB| = |CD|$.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.