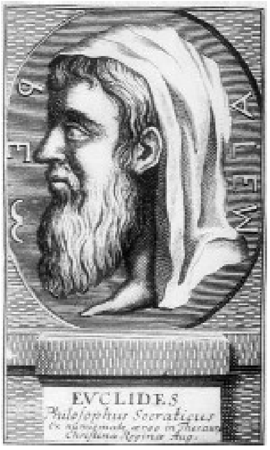
1.1 Basisbegrippen

Inleiding

De Griek **Euclides (ongeveer 300 v.Chr.)** was de eerste die een wiskundige theorie opbouwde. Hij legde de grondbegrippen van de theorie vast in definities, hij ging uit van een klein aantal aannames die hij proposities of axioma's noemde, en verder gebruikte hij enkele algemene aannames. Die theorie verwoordde hij in zijn boek ‘Stoicheia’ ofwel ‘De Elementen’ het beroemdste wiskundeboek aller tijden. Hij poogde er een fundament mee te leggen voor alle wiskunde, ook getallen behandelde hij als lijnstukken omdat de hele theorie op meetkundige inzichten was gestoeld. Alle wiskunde van die tijd leidde hij uit zijn definities en axioma's af door logische redeneringen, die bewijzen worden genoemd.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen definitie, axioma, vermoeden en bewijs gebruiken;
- (eenvoudige) bewijzen leveren vanuit de basisdefinities en axioma's;
- het begrip bewijs uit het ongerijmde.

Voorkennis

- verstandig redeneren.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet.

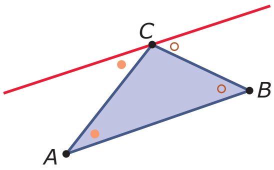
Je weet wel dat de som van de hoeken van een driehoek 180° is.
Maar kun je dat ook bewijzen?

Uitleg

Bekijk de applet

Het bewijs dat de som van de hoeken van een driehoek 180° is, wordt vaak als volgt geleverd.

- Trek door C een lijn evenwijdig aan AB.
- Bij C vind je dan drie hoeken die samen een gestrekte hoek vormen: een hoek die (Z-hoeken) gelijk is aan $\angle A$, en een hoek die (Z-hoeken) gelijk is aan $\angle B$.
- Een gestrekte hoek is 180° dus de hoeken A, B en C zijn samen 180°.



Figuur 2

Maar dit ‘bewijs’ rammelt nogal. Wat zijn Z-hoeken? Waarom en wanneer zijn Z-hoeken gelijk? En hoe zit het met een gestrekte hoek? Er worden begrippen gebruikt die kennelijk al eerder aan de orde zijn geweest. En zijn die begrippen ook goed vastgelegd en zijn hun eigenschappen eerst bewezen? Voor een goed bewijs moet dat in elk geval zeker zijn.

Voor een goed bewijs heb je dus nodig:

- goede afspraken over de betekenis van alle begrippen: goede definities;
- een aantal goed omschreven uitgangspunten: goede ‘axioma's’;
- goede logische ‘redeneerregels’ die iedereen hanteert.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Je ziet een redenering waaruit blijkt dat de som van de hoeken van een driehoek 180° is.

a Laat zien dat deze redenering ook geldt als $\angle B$ stomphoekig is.

b Wat zijn Z-hoeken? Waarom is de evenwijdigheid van de lijn door C met AB belangrijk?

Opgave 2

Je kent de stelling van Pythagoras. Zoek een bewijs van die stelling op, bijvoorbeeld via internet. Probeer dat bewijs zo te formuleren dat je het zelf goed begrijpt. Schrijf een aantal aannames op die in dit bewijs worden gedaan.

Opgave 3

Je krijgt een potlood, een (grote) passer, een liniaal zonder maatverdeling en een vel A4 waarop een lijnstuk is getekend.

a Hoe kun je dat lijnstuk in vier gelijke delen verdelen?

b Hoe kun je een hoek van 45° maken?

c Hoe kun je, ergens op het papier, een hoek van 60° maken? En een van 30°?

Opgave 4

In de Oudheid werden voor constructies alleen een liniaal zonder maatverdeling en een passer gebruikt. Stel je hebt een potlood, een passer, een liniaal zonder maatverdeling en een vel papier waarop drie lijnstukken zijn getekend.

a Hoe kun je een driehoek tekenen met de drie lijnstukken als zijden? Lukt dat altijd? Wanneer wel en wanneer niet? Als het wel lukt, kun je dan maar één driehoek tekenen of zijn er meer oplossingen mogelijk?

b Teken een lijn l en een punt P dat niet op l ligt. Construeer de lijn door P evenwijdig aan l.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **wiskundige theorie** bestaat uit:

- een aantal **definities** van begrippen;
- een zo klein mogelijk aantal basisaannames of **axioma's**;
- **stellingen**, dat wil zeggen beweringen die door middel van logisch redeneren kunnen worden afgeleid uit de axioma's. Zo'n logische redenering heet het bewijs van de stelling.

Ook de vlakke meetkunde kent zo'n theorieopbouw die al meer dan 2200 jaar geleden is gestart met de Griek Euclides.
In de **vlakke meetkunde** heb je basisdefinities en basisbegrippen.

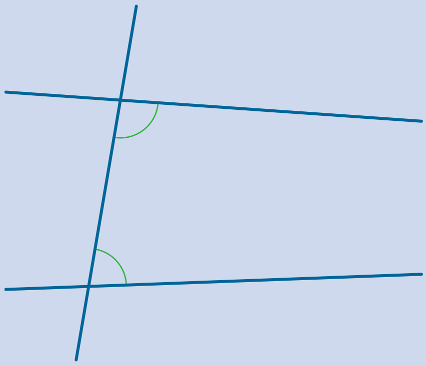
De begrippen punt, lijn, lijnstuk en hoek worden bekend verondersteld.

- De **afstand** tussen twee punten A en B is de lengte van het lijnstuk AB, genoteerd als $|AB|$, als AB of als $d(A,B)$ (de d van ‘distance’).
- Een **cirkel** bestaat uit alle punten op een bepaalde afstand van een vast punt, het middelpunt.
- Een **halve lijn** is het deel van een lijn aan één kant van een punt op die lijn, inclusief dat punt (de benen van een hoek zijn halve lijnen).

- Het **verlengde** van een lijnstuk AB is de halve lijn van de lijn door A en B die in B begint en waar A niet op ligt (het verlengde van BA is een andere halve lijn).
- Een **gestrekte hoek** is een hoek (180°) waarvan de benen in elkaars verlengde liggen.
- Een **rechte hoek** (90°) is de helft van een gestrekte hoek (180°).
- Twee hoeken die samen een gestrekte hoek vormen, zijn elkaars **nevenhoek**.
- Een **driehoek** bestaat uit drie punten (de hoekpunten), niet op één lijn, en de drie lijnstukken tussen die punten (de zijden). Telkens tussen twee zijden liggen de drie hoeken van de driehoek. Je duidt een driehoek aan met zijn hoekpunten: ΔABC.
- Twee lijnen **snijden** elkaar als ze één punt gemeenschappelijk hebben, het **snijpunt**.
- Twee lijnen heten **evenwijdig** als ze elkaar niet snijden (dat wil zeggen geen punt gemeen hebben).
- De **loodlijn** uit een punt P op een lijn l is de lijn door P die een rechte hoek maakt met l (**loodrecht** staat op l). Het snijpunt van l en de loodlijn S is het **voetpunt** van de loodlijn.
- De **middelloodlijn** van een lijnstuk AB is de lijn die AB loodrecht middendoor snijdt.

De vlakke meetkunde kent vijf axioma's, de befaamde axioma's (aannames) van de **Euclidische vlakke meetkunde**.

1. Tussen twee willekeurige punten kun je een lijn tekenen.
2. Een lijnstuk kan verlengd worden tot een rechte lijn.
3. Gegeven een punt M en een lijnstuk. Je kunt een cirkel tekenen met middelpunt M met een straal gelijk aan het lijnstuk.
4. Alle rechte hoeken zijn aan elkaar gelijk.
5. Als twee lijnen gesneden worden door een derde lijn en de som van de binnenhoeken kleiner is dan 180°, dan snijden de lijnen elkaar. Zie de figuur.



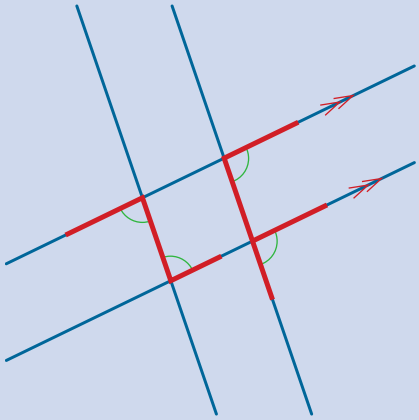
Figuur 3

Met behulp van de axioma's kun je het volgende bewijzen:

Als twee evenwijdige lijnen worden gesneden door een derde lijn zijn de F-hoeken en de Z-hoeken gelijk.

In deze figuur zie je de F-hoek en de Z-hoek.

Omdat het opbouwen van de gehele theorie van de vlakke meetkunde teveel tijd kost, is er voor het leveren van bewijzen een **Lijst van definities en stellingen voor vlakke meetkunde** ontwikkeld die als uitgangspunt wordt genomen, en die je dus moet kennen. De schuin gedrukte en onderstreepte termen dienen als verwijzing in een bewijs.



Figuur 4

Voorbeeld 1

Bekijk de applet.

Stelling

De som van de hoeken van een driehoek is 180°.

Lever het bewijs van deze stelling.

Antwoord

Bewijs

Trek door (bijvoorbeeld) C een lijn evenwijdig aan lijnstuk AB. (Dit kan volgens axioma 5)

Je ziet nu bij punt C twee nieuwe hoeken ontstaan waarvan $\angle A = \angle C_1$ en $\angle B = \angle C_3$ (Z-hoeken zijn gelijk).

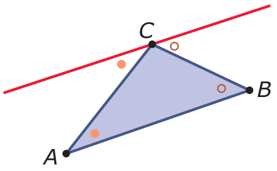
$\angle C_1 + C_2 + C_3 = 180°$ (gestrekte hoek).

Dus $\angle A + \angle B + \angle C_2 = 180°$

Q.e.d.

of

Quod erat demonstrandum: wat te bewijzen was.



Figuur 5

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 1** het bewijs dat de hoeken van een driehoek samen 180° zijn.

a Teken zelf de figuur bij dit bewijs en verleng zijde AC aan de kant van C.

Bij punt C tref je nu meerdere hoeken aan. $\angle C$ zit in de ΔABC en heet daarom een binnenhoek van deze driehoek. De hoek tussen BC en het verlengde van AC is een buitenhoek van ΔABC. $\angle A$ en $\angle B$ zijn ook binnenhoeken van de driehoek. Het zijn de niet-aanliggende binnenhoeken van de buitenhoek van $\angle C$.

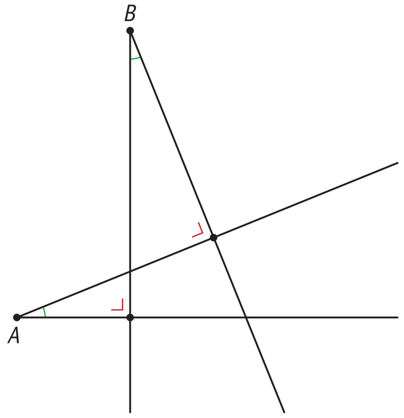
b Bewijs de stelling: ‘In een driehoek is elke buitenhoek gelijk aan de som van de niet-aanliggende binnenhoeken.’

Voorbeeld 2

Bekijk de applet.

Uitspraak: ‘Als elk van de benen van een hoek loodrecht staat op een van de benen van een andere hoek, dan zijn die hoeken gelijk.’

Dit lijkt een goede uitspraak. Maar je kunt gemakkelijk een voorbeeld verzinnen waarin de uitspraak onwaar is, een tegenvoorbeeld. De uitspraak (een vermoeden) kan daarom geen stelling worden, hij is niet algemeen geldig.



Figuur 6

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** wordt een vermoeden beschreven.

a Schrijf nog eens nauwkeurig op wat het vermoeden is dat daar wordt geuit.

b Teken een situatie waarin het vermoeden niet juist is en beschrijf wat er fout gaat.

c Waarom is slechts één tegenvoorbeeld genoeg om te bewijzen dat het vermoeden niet waar is?

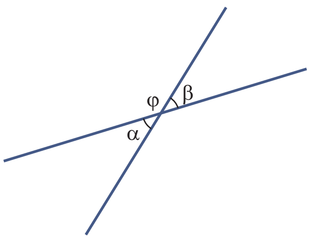
d Kun je het vermoeden iets anders formuleren zodat het wel kan worden bewezen? Welke stelling krijg je?

Voorbeeld 3

Bekijk de applet.

Bekijk de applet

Stelling
De overstaande hoeken bij twee snijdende lijnen zijn gelijk.



Figuur 7

Antwoord

Bewijs

α en β zijn twee overstaande hoeken. Beide hebben dezelfde nevenhoek φ.
Dus is $\alpha + \varphi = 180°$ en is ook $\beta + \varphi = 180°$ (gestrekte hoek).

Hieruit volgt: $\alpha = \beta$.

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** wordt een eenvoudige uitspraak bewezen.

a Wat is het verschil tussen een vermoeden en een stelling?

b Waarom is ook voor zo'n eenvoudige uitspraak een bewijs nodig?

c Wat is een tegenvoorbeeld?

Opgave 8

De lijnen l en m staan loodrecht op elkaar, s is een derde lijn.

a Bewijs de stelling: Als s loodrecht staat op l, is s evenwijdig met m.

b Schrijf het omgekeerde van deze stelling op. Is dit ook een ware bewering?

Voorbeeld 4

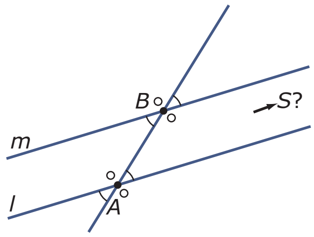
Bekijk de applet.

Bij een ‘bewijs uit het ongerijmde’ ga je ervan uit dat wat je wilt bewijzen niet waar is. Daaruit leid je een tegenspraak af met het gegeven of met een al bekende stelling.

Bewijs hiermee: ‘Als twee lijnen gesneden worden door een derde lijn en de F-hoeken zijn gelijk, dan zijn die twee lijnen evenwijdig.’

Antwoord

Bij twee gelijke F-hoeken zijn ook hun overstaande hoeken gelijk.
En de vier nevenhoeken van al die F-hoeken zijn ook gelijk.
De acht hoeken in de figuur zijn dus vier aan vier gelijk.



Figuur 8

Neem nu aan dat beide lijnen l en m niet evenwijdig zijn, dus elkaar snijden in een punt S. Kijk naar twee hoeken tussen de twee lijnen en de derde lijn aan de kant waar S ligt. Die twee hoeken zijn hoeken van driehoek ASB.
Eén van hen is gelijk aan de nevenhoek van de F-hoek van de andere.
Omdat de F-hoeken gelijk zijn, zijn de twee hoeken samen 180°.
Maar dat is onmogelijk, omdat het maar twee hoeken van een driehoek zijn en de som van de hoeken van een driehoek 180° is. De aanname dat beide lijnen elkaar snijden, is dus onjuist, ze zijn evenwijdig.

Q.e.d.

Opgave 9

Bekijk in **Voorbeeld 4** nog eens een bewijs uit het ongerijmde. Bekijk nu de stelling: ‘In ΔABC is $\angle A$ stomp en het voetpunt D van de loodlijn uit C op AB ligt op het verlengde van BA.’

a Laat zien dat punt D niet kan samenvallen met punt A. Beschrijf de tegenspraak waar dit toe leidt.

b Laat zien dat punt D niet tussen A en B kan liggen of met B kan samenvallen of op het verlengde van AB kan liggen.

c Waarom is hiermee de stelling bewezen?

Opgave 10

Uitspraak: ‘Als de lijnen m en n evenwijdig zijn met de lijn l, dan zijn m en n ook evenwijdig aan elkaar.’

Dit lijkt een simpele uitspraak. Maar omdat hij niet bij de axioma's hoort, moet je hem daaruit kunnen afleiden. Laat zien hoe. Gebruik een bewijs uit het ongerijmde.

Verwerken

Opgave 11

Als een driehoek rechthoekig is, dan is één van de zijden langer dan de andere twee zijden.

a Is dat waar?

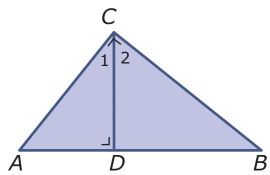
b Is het omgekeerde van deze uitspraak waar?

c Wat kun je over de hoeken van een driehoek zeggen als één van de zijden langer is dan de andere?

Opgave 12

Driehoek ABC heeft een rechte hoek bij C.
Vanuit C is een loodlijn getrokken op AB.

Bewijs dat $\angle A = \angle C_2$.



Figuur 9

Opgave 13

Strikt genomen is evenwijdigheid wel gedefinieerd voor lijnen maar niet voor lijnstukken.

a Bij een gegeven lijnstuk is er precies één lijn waar dat lijnstuk op ligt. Waarom?

b Bedenk een definitie voor evenwijdigheid van lijnstukken.

Opgave 14

In deze opdracht geef je een ander bewijs voor de stelling dat in een driehoek de som van de hoeken $180°$ is. Je bewijst de stelling eerst voor rechthoekige driehoeken en daarna voor een willekeurige driehoek.

a Teken een rechthoek $ABCD$ en teken daarin de diagonaal AC. Waarom is $\angle CAB = \angle ACD$?

b Bewijs dat in een rechthoekige driehoek de som van de hoeken $180°$ is.

c Teken nu een willekeurige scherphoekige driehoek ABC en teken de loodlijn CD vanuit C op AB. In de driehoek heb je twee rechthoekige driehoeken gekregen. Bewijs hiermee, en met het voorgaande, dat de som van de hoeken $180°$ is.

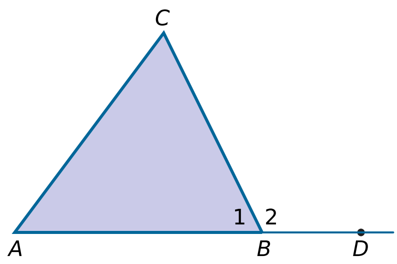
d Je hebt de stelling bewezen voor scherphoekige driehoeken. Geef een bewijs voor stomphoekige driehoeken.

Opgave 15

Gegeven is ΔABC. Punt D ligt op het verlengde van AB.

a Bewijs dat $\angle A + \angle C = \angle B_2$.

b Welke stelling uit de **Lijst van definities en stellingen** heb je bij a bewezen?



Figuur 10

Toepassen

Opgave 16: Verdelen in vier gelijke delen

Hoe verdeel je een lijnstuk in vier gelijke delen als je alleen een liniaal zonder maatverdeling en een passer mag gebruiken?

Opgave 17: Driehoeken op een bol

Toen in West-Europa landen ontstonden met eigen regeringen en ambtenaren, werd het bepalen van de grootte van het grondgebied belangrijk. Landmeters gebruikten daarbij driehoeksmeting. Ze werken dan met driehoeken. En ook zij namen aan dat de som van de hoeken van een driehoek $180°$ is.

Kun je laten zien dat dit voor driehoeken op het aardoppervlak niet waar kan zijn? Waarom ontdekten de landmeters dat niet meteen?

Testen

Opgave 18

Gegeven een stomphoekige driehoek. Bewijs uit het ongerijmde dat de driehoek twee scherpe hoeken heeft.

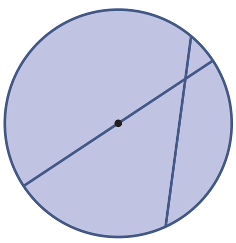
Opgave 19

Bekijk een koorde van een cirkel (dat is het lijnstuk tussen twee punten op de cirkel).

a Wat vermoed je over de lengte van die koorde, vergeleken met de lengte van een middellijn?

b Als je vermoeden klopt, moet je het kunnen bewijzen. Probeer dat met hulplijnen.

c Er doet zich een speciaal geval voor. Heb je daar rekening mee gehouden?



Figuur 11

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.