3.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Differentiaalvergelijkingen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- continu dynamisch model — differentiaalvergelijking — oplossingen van een differentiaalvergelijking — randvoorwaarden
- methode van Euler — lijnelementenveld of richtingsveld
- variabelen scheiden
- lineaire differentiaalvergelijking — eerste orde, tweede orde

Activiteitenlijst

- een continu dynamisch model beschrijven met een differentiaalvergelijking — oplossingen van een differentiaalvergelijking controleren door invullen — een specifieke oplossingsfunctie bepalen met de randvoorwaarde(n)
- oplossingen van een differentiaalvergelijking benaderen met de methode van Euler — lijnelementenvelden maken om oplossingen in beeld te brengen
- differentiaalvergelijkingen oplossen door scheiden van de variabelen
- lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste en de tweede orde oplossen
- toepassingen van differentiaalvergelijkingen

Achtergronden

Figuur 1

Eén van de productiefste wiskundigen ooit is wel **Leonhard Euler**, een naam die je ongetwijfeld al eerder bent tegengekomen.

In 1755 verscheen Euler's boek ‘Institutiones calculi differentialis’ en in de jaren 1768 - 1774 werd dit gevolgd door drie dikke delen "Institutiones calculi integralis". Daarin wordt niet alleen de elementaire differentiaal- en integraalrekening systematisch behandeld, maar er is ook een eerste fundamentele behandeling van differentiaalvergelijkingen in te vinden.

Euler onderscheid daarin lineaire, exacte en homogene differentiaalvergelijkingen. En ook de methode van het scheiden der variabelen wordt erin besproken.

Het oplossen van differentiaalvergelijkingen is bijna altijd een behoorlijke uitdaging. In dit onderwerp heb je alleen de meest eenvoudige gevallen voorbij zien komen. Ook over lineaire d.v.'s is veel meer te zeggen als in $ay' + by = c$ of $ay'' + by' + c = d$ de parameters a,b,c en d geen constanten, maar zelf ook weer functies zijn.

Testen

Opgave 1

Los deze differentiaalvergelijkingen op:

a $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$ met $y(1) = 3$

b $H"(t) = 6H'(t) - 8H(t)$ met $H(0) = 40$ en $H'(0) = 0$

Opgave 2

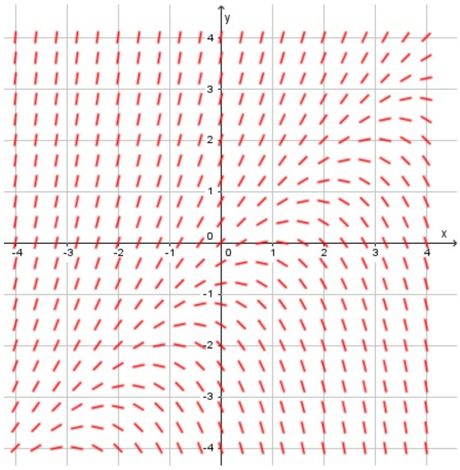
Hier zie je een richtingsveld (lijnelementenveld) bij een differentiaalvergelijking.

a Een bepaalde oplossing van deze differentiaalvergelijking heeft een rechte lijn als grafiek. Geef het bijbehorende functievoorschrift.

b Welke van de volgende differentiaalvergelijkingen past bij dit richtingsveld?

- $y' = -1 + x$
- $y' + y = -1 + x$
- $f'(x) \cdot f(x) = x$
- $f'(x) = f(x) + 1 - x$

c Laat zien dat de functies $f(x) = x - c \cdot \mathrm{e}^x$ oplossingen zijn van de differentiaalvergelijking.



Figuur 2

Opgave 3

Op een bolvormig kogeltje met straal r, dat in een vloeistof zinkt, werken drie krachten:

- de zwaartekracht $F_Z = m \cdot g$ waarin m de massa (in kg) en $g \approx 9{,}8$ de gravitatieconstante is;
- de opwaartse kracht F_{op}, een kracht die volgens de wet van Archimedes gelijk is aan het gewicht van de verplaatste vloeistof, in formulevorm: $F_{op} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$ waarin ρ de dichtheid van de vloeistof voorstelt;
- de wrijvingskracht F_W, een kracht die volgens de wet van Stokes recht evenredig met de snelheid v is en wordt gegeven door de formule: $F_W = 6\pi\eta r$, waarin η een constante is die bepaald wordt door de 'stroperigheid' van de vloeistof (η heet de viscositeit).

r is de straal van de bolvormige kogel in m.

a Stel een differentiaalvergelijking voor de snelheid $v(t)$ van het zinkende kogeltje.

b Ga uit van de volgende gegevens en bereken de viscositeit η van de vloeistof.

- $\rho = 1{,}26 \cdot 10^3$ kg/m^3;
- $r = 0{,}02$ m;
- $m = 0{,}05$ kg;
- de kogel benadert een eindsnelheid van 0,2 m/s.

Opgave 4

Stel je een winter voor met een constante buitentemperatuur van 0 °C. De binnentemperatuur T in een gebouw wil je toch op 20 °C brengen. Je mag daarbij aannemen dat de mate waarmee de binnentemperatuur afneemt evenredig is met het verschil tussen binnen- en buitentemperatuur (noem de evenredigheidsconstante c). Door het stoken zal de binnentemperatuur stijgen. Veronderstel dat de mate van deze stijging evenredig is met de binnentemperatuur zelf en ook evenredig met het verschil tussen de binnentemperatuur en de streeftemperatuur van 20 °C (noem de evenredigheidsconstante k).

a Laat zien dat uit deze gegevens de volgende differentiaalvergelijking is af te leiden: $T'(t) = (c + 20k) \cdot T(t) - k \cdot (T(t))^2$.

Neem $c = -10$ en $k = 2$.

b Is er sprake van een logistisch groeimodel?

Op $t = 0$ is de binnentemperatuur 10 °C.

c Geef een functievoorschrift van $T(t)$ door de differentiaalvergelijking uit b op te lossen.

d Welke temperatuur zal er op den duur in het gebouw heersen? Wordt de streeftemperatuur bereikt?

Opgave 5

Na een langdurige vergadering is het zuurstofgehalte in een vergaderlokaal met een inhoud van 80 m^3 gedaald. In 1 m^3 zit nog maar 14% zuurstof terwijl daar normaal gesproken ongeveer 21% zuurstof in zit. Na de vergadering zet de beheerder snel de ventilator aan. Deze ventilator vervangt per seconde 0,01 m^3 lucht door buitenlucht met een zuurstofgehalte van 22%. Noem H de hoeveelheid zuurstof (in dm^3) in het lokaal.

a Bereken $H(0)$.

b Laat zien dat je $H(t)$ bij benadering kunt beschrijven door: $H'(t) = 2{,}2 - 1{,}25 \cdot 10^{-4} \cdot H(t)$ met t in seconden.

c Los deze differentiaalvergelijking op.

d Na hoeveel uren is het zuurstofpercentage boven de 20%?

Toepassen

Opgave 6: Oplossingskrommen en isoclinen

Onderzoek de differentiaalvergelijkingen van de vorm $\frac{dy}{dx} = \frac{ax}{y}$.

a Hoe zien de lijnelementenvelden van deze differentiaalvergelijkingen er uit voor verschillende waarden van a? Geef enkele karakteristieke voorbeelden. Probeer ook regelmaat te beschrijven.

b Hoe zien de oplossingskrommen er uit voor verschillende waarden van a? Geef vergelijkingen en parametervoorstellingen.

Isoclinen zijn krommen in het richtingsveld waarvan elk punt dezelfde richtingscoëfficiënt (van de raaklijn aan die isocline) heeft.

c Hoe zien deze isoclinen er bij deze d.v. uit? Geef vergelijkingen.

Examen

Opgave 7

Gegeven is de differentiaalvergelijking D door $4e^y(e^y - 1)\frac{dy}{dx} = 1 - x$.

a Geef door arcering het gedeelte van het Oxy-vlak aan, waar de richtingscoëfficiënten van de door D bepaalde lijnelementen positief zijn.

b Toon aan dat de kromme K gegeven door de parametervoorstelling $x = 1 + 2\sin(t)$ en $y = \ln(1 + \cos(t))$ een oplossingskromme van D is.

L is een oplossingskromme van D die door het punt $(-2, \ln(3))$ gaat.

c Stel een vergelijking van L op.

(bron: examen wiskunde B1,2 in 1991, eerste tijdvak)

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@xs4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.