3.5 Toepassingen

Inleiding

Je hebt met diverse soorten differentiaalvergelijkingen kennis gemaakt. Sommige daarvan kun je systematisch oplossen. Je hebt ook al wat toepassingen van differentiaalvergelijkingen leren kennen. En daar zijn er nog veel meer van. In dit onderdeel maak je nog kennis met enkele andere toepassingen uit de natuurkunde en de biologie.

Je leert in dit onderwerp

- differentiaalvergelijkingen in de praktijk toepassen.

Voorkennis

- het begrip continu dynamisch model en de bijbehorende differentiaalvergelijkingen, het begrip oplossing van een differentiaalvergelijking;
- oplossingen van differentiaalvergelijkingen controleren;
- de oplossingen van een differentiaalvergelijking benaderen met de methode van Euler;
- de oplossingen van een differentiaalvergelijking zoeken met behulp van een richtingsveld (lijnelementenveld);
- een (lineaire) differentiaalvergelijking oplossen door het scheiden van de variabelen of een geschikte substitutie.

Verkennen

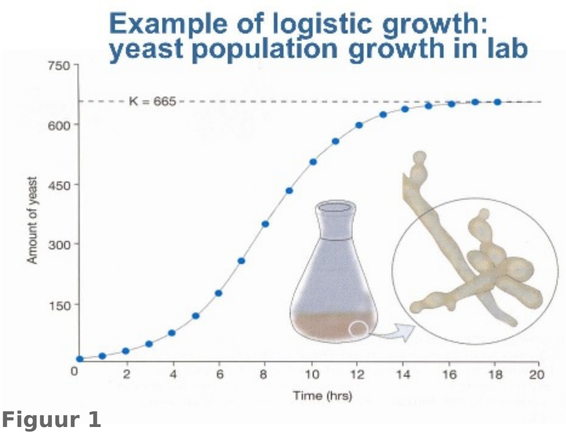
Opgave V1

Bij het standaard exponentiële groeimodel past een differentiaalvergelijking van de vorm:

$N'(t) = k \cdot N(t)$

Deze differentiaalvergelijking is gewoon een vertaling van 'de snelheid waarmee de hoeveelheid $N(t)$ met de tijd t toeneemt is recht evenredig met die hoeveelheid zelf'.

a Welke oplossingen heeft zo'n differentiaalvergelijking? En hoe bepaal je die?



Figuur 1

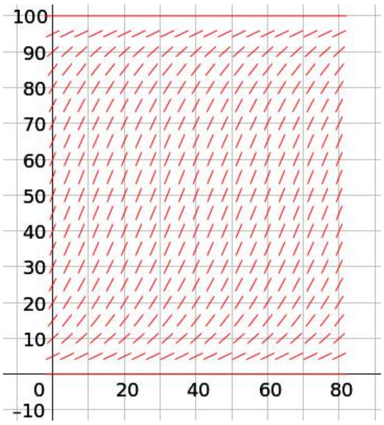
De Belgische wiskundige P. F. Verhulst (1804—1849) constateerde dat het standaard exponentiële groeimodel uiteindelijk nooit kan voldoen. Op zeker moment wordt de hoeveelheid zo groot, dat de zaken die nodig zijn om de groeisnelheid recht evenredig te laten blijven met de hoeveelheid, gewoon op raken. Hij bedacht dat ook de constante k moest afhangen van $N(t)$: hoe dichter $N(t)$ bij de maximaal mogelijke hoeveelheid M komt, hoe kleiner k.

b Leg uit dat $k = c \cdot (M - N(t))$ hieraan voldoet.

c De differentiaalvergelijking die Verhulst bedacht is dus $N'(t) = c \cdot (M - N(t)) \cdot N(t)$. Probeer om deze differentiaalvergelijking op te lossen.

Uitleg

Bekijk de applet.



Figuur 2

Differentiaalvergelijkingen kennen veel toepassingen, vooral in de natuurkunde en de biologie.

Bijvoorbeeld bij een exponentieel groeiende populatie is de groeisnelheid recht evenredig met de hoeveelheid $N(t)$ op een bepaald tijdstip t.

Zo'n zin kun je vertalen in een differentiaalvergelijking: $N'(t) = k \cdot N(t)$.

Maar al vroeg in de negentiende eeuw bedacht Pierre François Verhulst (1804—1849), een Belgische wiskundige, dat dit nooit het complete
verhaal zou kunnen zijn in de praktijk. Op zeker moment raken gewoon de voorwaarden voor de ongebreidelde groei uitgeput: onvoldoende voedsel, bijvoorbeeld. Hij bedacht dat de evenredigheidsconstante kleiner zou moeten worden naarmate $N(t)$ dichter in de buurt van een maximaal mogelijke populatieomvang M komt. Hij vertaalde dit in $k = c \cdot (M - N(t))$. Daarmee wordt de differentiaalvergelijking die deze geremde groei beschrijft

$N'(t) = c \cdot (M - N(t)) \cdot N(t)$

Het groeimodel van Verhulst heet het logistisch groeimodel.

De bijbehorende differentiaalvergelijking is op te lossen door scheiden van de variabelen. Ga na dat je hem zo kunt schrijven:

$\frac{1}{(M-N)\cdot N} \mathrm{d}N = c\,\mathrm{d}t$

Het probleem is nu dat de primitieve van $\frac{1}{(M-N)\cdot N}$ niet eenvoudig is te vinden. Dat lukt alleen door deze breuk te splitsen in twee eenvoudiger breuken. In de opgaven ga je dat zelf doen. Het richtingsveld met $M = 100$ en $c = 0{,}001$ geeft al vast een beeld van de grafieken van de oplossingsfuncties.

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt het logistisch groeimodel besproken. De bijbehorende differentiaalvergelijking is $N'(t) = c \cdot (M - N(t)) \cdot N(t)$, waarin c een constante is.
Neem $M = 100$ en $c = 0{,}001$.

a Schrijf de differentiaalvergelijking in een vorm waarin de variabelen gescheiden zijn.

Je kunt $\frac{1}{(100-N)N}$ splitsen in een optelling van twee breuken:

$\frac{1}{(100-N)N} = \frac{a}{100-N} + \frac{b}{N}$

b Hoe kun je laten zien dat dit waar is en tegelijk de twee juiste waarden van a en b berekenen?

c Bereken de juiste waarden van a en b.

d Gebruik de breuksplitsing die je zojuist hebt uitgevoerd om de differentiaalvergelijking op te lossen. Druk N uit in t.

e Laat zien dat je $N(t)$ kunt schrijven als $N(t) = \frac{100}{1+C\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}}$.

f Laat zien dat je de bij e gevonden functies $N(t)$ passen in het lijnelementenveld.

Opgave 2

Bij het logistisch groeimodel hoort de differentiaalvergelijking $N'(t) = c \cdot (M - N(t)) \cdot N(t)$, waarin c een constante is.

a Laat zien dat de oplossingsfuncties hiervan de vorm $N(t) = \frac{M}{1+A\,\mathrm{e}^{-cMt}}$ hebben.

b Laat zien dat $A = \frac{M-N(0)}{N(0)}$.

c Laat zien dat de functie die je in de voorgaande opgave hebt gevonden overeenkomt met die in a.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Differentiaalvergelijkingen kennen heel veel toepassingen, je hebt er al een aantal voorbij zien komen. Ze treden op in situaties waarin naast een grootheid zelf ook de verandering van die grootheid, of de verandering van de verandering van die grootheid een rol speelt.

Bekende situaties zijn:

- Exponentiële groei waarin de groeisnelheid van een hoeveelheid recht evenredig is met die hoeveelheid zelf.
  Differentiaalvergelijking: $N'(t) = k \cdot N(t)$.
  Oplossing te vinden door variabelen scheiden: $N(t) = A\,\mathrm{e}^{kt}$.
- Logistische (geremde exponentiële) groei waarin de groeisnelheid van een hoeveelheid recht evenredig is met die hoeveelheid zelf, maar de evenredigheidsfactor kleiner wordt naarmate de hoeveelheid dichter bij een zeker maximum komt.
  Differentiaalvergelijking: $N'(t) = c \cdot (M - N(t)) \cdot N(t)$.
  Oplossing te vinden door variabelen scheiden en breuksplitsen: $N(t) = \frac{M}{1+A\,\mathrm{e}^{-kt}}$.
- Beweging in een zwaartekrachtsveld, zoals vrije val met en zonder luchtweerstand, zie **Voorbeeld 2**.

Voorbeeld 1

Het aantal dieren in een kolonie pinguïns op een afgelegen eiland schommelt al jaren rond de 3600. Na een grote milieuramp (een gecrashte olietanker) sterft tweederde deel van de populatie uit. De populatie lijkt zich weer snel te gaan herstellen, na een jaar zijn er alweer 1540 pinguïns. Onderzoekers gaan uit van een logistisch groeimodel voor het aantal pinguïns $P(t)$, met t in jaren na de milieuramp en met een maximum aantal pinguïns van 3600. De bijbehorende differentiaalvergelijking is $P'(t) = c \cdot (3600 - P(t)) \cdot P(t)$.

Los deze differentiaalvergelijking op en bereken de juiste waarde van c in vijf decimalen nauwkeurig.

Antwoord

Je kunt de differentiaalvergelijking schrijven als $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = c(3600 - P)P$.

Je kunt daarom de variabelen scheiden: $\frac{1}{(3600-P)P}\,\mathrm{d}P = c\,\mathrm{d}t$.

Door breuksplitsen en integreren vind je: $\frac{1}{3600}\ln\left|\frac{P}{3600-P}\right| = ct + C$, waarin C een willekeurige constante is.

Dit kun je herleiden naar: $y = \frac{3600}{1+A\cdot\mathrm{e}^{-3600t}}$.

Uit het gegeven dat $P(0) = 1200$ bepaal je $A = 2$.

Uit het gegeven dat $P(1) = 1540$ bepaal je $c \approx 0{,}00011$.

Opgave 3

Bekijk het logistisch groeimodel in **Voorbeeld 1**.

a Laat zien hoe je de differentiaalvergelijking door breuksplitsen kunt oplossen.

b Laat zien dat $A = 2$.

c Laat zien dat $c \approx 0{,}00011$.

Voorbeeld 2

Een parachutist met een massa van $m = 60$ kg springt met een beginsnelheid van 2 m/s uit een vliegtuig. Hij ondervindt dan de zwaartekracht $F_Z = m \cdot g$ richting de aarde en een wrijvingskracht $F_W = k \cdot v(t)$.

Volgens de tweede wet van Newton werkt op hem een kracht van $F = F_Z - F_W = m \cdot g - k \cdot v(t) = m \cdot a(t)$.

Hierin is:

- F de kracht in Newton;
- m de massa in kg;
- $g \approx 9{,}8$ de gravitatieconstante in m/s^2;
- v de snelheid in m/s;
- k de wrijvingsconstante;
- a de versnelling in m/s^2;

Neem aan dat $k = 20$ en stel een differentiaalvergelijking op voor de snelheid $v(t)$ van deze parachutist zolang hij zijn parachute nog niet heeft uitgeklapt. Bereken welke snelheid deze parachutist maximaal zal halen zonder zijn valscherm te openen.

Antwoord

Omdat $a(t) = v'(t)$ wordt de differentiaalvergelijking $m \cdot v'(t) = m \cdot g - k \cdot v(t)$.

Met de gegevens ingevuld: $60v'(t) = 588 - 20v(t)$ ofwel $v'(t) = 9{,}8 - \frac{1}{3}v(t)$.

Je kunt de variabelen scheiden: $\frac{1}{9{,}8 - \frac{1}{3}v}\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}t$.

Door integreren vind je: $-3\ln\left|9{,}8 - \frac{1}{3}v\right| = t + C$, waarin C een willekeurige constante is.

Dit kun je herleiden naar: $v = 29{,}4 - A \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t}$.

Uit het gegeven dat $v(0) = 2$ bepaal je $A = 27{,}4$.

De volledig oplossing wordt $v(t) = 29{,}4 - 27{,}4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t}$.

De parachutist zal een snelheid van 29,4 m/s benaderen.

Opgave 4

Bekijk het model van de vrije val in **Voorbeeld 2**.

a Laat zien hoe je de gevonden differentiaalvergelijking oplost en de oplossing herleid naar de juiste vorm.

b Laat zien dat $A = 27{,}4$.

c Na hoeveel seconden heeft de parachutist de snelheid van 29,4 s tot op één decimaal nauwkeurig bereikt?

Opgave 5

Bij het algemene model voor de vrije valbeweging hoort de differentiaalvergelijking
$m \cdot v'(t) = m \cdot g - k \cdot v(t)$

a Los ook deze differentiaalvergelijking op.

b Laat zien dat $A = mg - v(0)$.

c Welke grenswaarde heeft de snelheid die het vallende voorwerp bereikt?

d Welke invloed heeft de luchtweerstand op deze grenswaarde?

Verwerken

Opgave 6

Een steen met een massa van 1 kg wordt van een hoge toren naar beneden gegooid met een beginsnelheid van 8 m/s. De wrijvingskracht die de steen tijdens de val ondervindt is recht evenredig met de snelheid $v(t)$.

Volgens de tweede wet van Newton geldt: $m \cdot v'(t) = m \cdot g - k \cdot v(t)$, waarin m de massa in kg, $g \approx 9{,}8$ de gravitatieconstante in m/s^2 en k de wrijvingsconstante is.

a Aan welke differentiaalvergelijking moet $v(t)$ in deze situatie voldoen?

b Los deze differentiaalvergelijking op.

c Na 6 s is de snelheid van de steen 15 m/s. Bereken k.

Opgave 7

Je schiet een voorwerp loodrecht omhoog af met een beginsnelheid van 20 m/s. Nu zijn zowel de wrijvingskracht als de zwaartekracht naar beneden (naar de aarde) gericht.

Volgens de tweede wet van Newton geldt nu: $m \cdot v'(t) = -m \cdot g - k \cdot v(t)$, waarin m de massa in kg, $g \approx 9{,}8$ de gravitatieconstante in m/s^2 en k de wrijvingsconstante is. Neem $k = 2$ en $m = 1$ kg.

a Aan welke differentiaalvergelijking moet $v(t)$ in deze situatie voldoen?

b Los deze differentiaalvergelijking op.

c Na hoeveel seconden bereikt dit voorwerp zijn hoogste punt.

Opgave 8

Een voorwerp valt van een toren van een hoogte van 110 m. Neem aan dat de wrijvingskracht te verwaarlozen is.

Volgens de tweede wet van Newton geldt dan: $m \cdot v'(t) = m \cdot g$, waarin m de massa in kg en $g \approx 9{,}8$ de gravitatieconstante in m/s^2 is.

a Aan welke differentiaalvergelijking moet $v(t)$ in deze situatie voldoen?

b Los deze differentiaalvergelijking op.

c Welke formule geldt voor de hoogte $h(t)$ van dit voorwerp boven de grond?

d Na hoeveel seconden komt dit voorwerp op de grond?

Opgave 9

Bij een logistisch groeimodel geldt de differentiaalvergelijking $H'(t) = 0{,}0015 \cdot (400 - H(t)) \cdot H(t)$.

a Los deze differentiaalvergelijking op.

b Bepaal de oplossingsfunctie waarvoor $H(0) = 50$.

c Voor welke waarde van t is de maximale waarde van $H(t)$ tot op 1% benaderd?

Opgave 10

In een land met een bevolkingsgrootte van 10 miljoen breekt een besmettelijke ziekte uit. Op zeker moment is 0,1% van de bevolking besmet. Laat $B(t)$ (in miljoenen) het aantal besmette personen zijn afhankelijk van de tijd t in jaren na dit moment. Onderzoekers stellen een model op waarin wordt aangenomen dat het aantal besmette personen toeneemt met een snelheid die op elk moment recht evenredig is met het product van het aantal besmette en het aantal niet besmette personen.

a Leg uit waarom hier sprake is van een logistisch groeimodel en stel een bijpassende differentiaalvergelijking op.

b Uit tellingen blijkt dat de evenredigheidsconstante bij benadering 1 is. Op welk tijdstip is volgens dit model 10% van de bevolking besmet?

Testen

Opgave 11

In een tuindersbedrijf wil men weten hoe een bepaalde bodembedekker in de lente groeit. Aan het begin van de lente wordt er 1 m^2 van een braakliggend terrein met deze bodembedekker bedekt. Na zes weken is er 1,4 m^2 bodem met de plant bedekt. In eerste instantie lijkt de bodembedekker exponentieel te groeien. Neem als tijdseenheid een week met $t = 0$ als de bedekte oppervlakte 1 m^2 bedraagt.

a Schat de groeifactor g in dat model.

b Hoeveel m^2 zou er in dit model bedekt moeten zijn na 9 weken? En na 12 weken?

In werkelijkheid neemt de groeisnelheid na verloop van tijd af. Aan het einde van de twaalfde week is ongeveer 1,6 m^2 bedekt en in de week die daarop volgt groeit de bodembedekker bijna niet meer. Men neemt daarom aan dat de groei logistisch is en dat de bedekte oppervlakte niet boven de 1,6 m^2 komt.

c Stel de bijbehorende differentiaalvergelijking op en los hem op.

d Bereken hoeveel bodem er na 9 weken is bedekt.

Opgave 12

Uit een vliegtuig laat men voedselpakketten vallen. De voedselpakketten ondervinden tijdens de val een wrijvingskracht die evenredig is met de snelheid.

a Laat zien dat de snelheid $v(t)$ van zo'n pakket beschreven kan worden door de volgende differentiaalvergelijking $m \cdot v'(t) = mg - k \cdot v(t)$, als m de massa van zo'n pakket in kg, g de gravitatieconstante en k de evenredigheidsconstante is.

Nu is $m = 40$ kg, $g \approx 9{,}8$ m/s^2 en $k = 20$.

b Los de differentiaalvergelijking op.

c In hoeveel seconden neemt de snelheid van het pakket toe van 0 m/s naar 15 m/s?

d Bepaal de maximale snelheid die het pakket kan bereiken in één decimaal nauwkeurig.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.