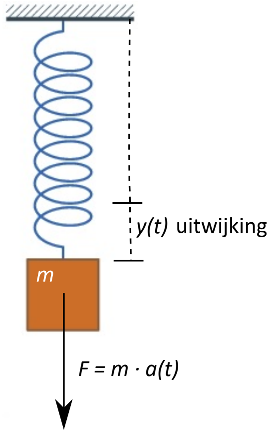
3.4 Lineaire differentiaalvergelijkingen

Inleiding

Tot nu toe heb je gewerkt met differentiaalvergelijkingen waar geen hogere afgeleiden in voorkomen. Dat noem je differentiaalvergelijkingen van de eerst orde. Nu ga je ook kennis maken met differentiaalvergelijkingen van hogere orde. Vooral natuurkundige en biologische toepassingen spelen daarbij een grote rol, denk maar aan exponentiële groei, de **beweging van een gewichtje aan een veer** (bron: Wikipedia), en dergelijke.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- eerste orde lineaire differentiaalvergelijkingen herkennen en oplossen;
- tweede orde lineaire differentiaalvergelijkingen herkennen en oplossen.

Voorkennis

- het begrip continu dynamisch model en de bijbehorende differentiaalvergelijkingen, het begrip oplossing van een differentiaalvergelijking;
- oplossingen van differentiaalvergelijkingen controleren;
- de oplossingen van een differentiaalvergelijking benaderen met de methode van Euler;
- de oplossingen van een differentiaalvergelijking zoeken met behulp van een richtingsveld (lijnelementenveld);
- een differentiaalvergelijking oplossen door het scheiden van de variabelen;
- rekenen met complexe getallen.

Verkennen

Opgave V1

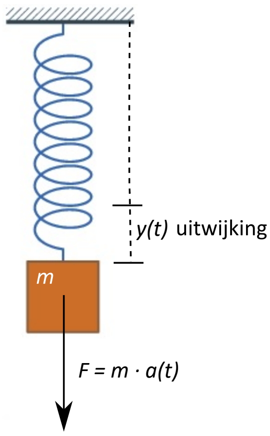
Je ziet hier een plaatje van een gewichtje aan een veer. Met de luchtweerstand wordt geen rekening gehouden, dus er geldt de wet van Hooke:

$F = m \cdot a(t) = -k \cdot y(t)$

Hierin is:

- m de massa van het gewichtje in kg;
- $a(t)$ de versnelling die het gewichtje ondervindt onder invloed van de zwaartekracht en de veerkracht;
- k een constante afhankelijk van de veer (materiaal, uitrekbaarheid);
- $y(t)$ de uitwijking van het gewichtje uit de evenwichtsstand in m;
- F de kracht die op het gewichtje werkt in N (newton);

De versnelling $a(t)$ is de verandering van de snelheid $v(t)$ en de snelheid is de verandering van de uitwijking $y(t)$ op een bepaald tijdstip t. Die versnelling is daarom de tweede afgeleide van de uitwijking.



Figuur 2

a Welke differentiaalvergelijking beschrijft het heen en weer bewegen van het gewichtje?

b Hoe kun je deze differentiaalvergelijking oplossen?

c Laat zien dat functies van de vorm $y(t) = A\sin(bt + c)$ oplossingen zijn van deze differentiaalvergelijking.

Uitleg 1

Bij exponentiële groei is de groeisnelheid recht evenredig met de hoeveelheid $H(t)$ op een bepaald tijdstip t.

Zo'n zin kun je vertalen in een differentiaalvergelijking: $H'(t) = k \cdot H(t)$.

Soms is de exponentiële groei begrensd, bijvoorbeeld als je heet water in een kamer plaatst met een lagere temperatuur. Dan is de snelheid waarmee de temperatuur $T(t)$ afneemt met de tijd t recht evenredig met het temperatuurverschil met de kamertemperatuur T_k.

Zo'n zin kun je vertalen in een differentiaalvergelijking: $T'(t) = k \cdot (T(t) - T_k)$.

Deze twee differentiaalvergelijkingen zijn voorbeelden van differentiaalvergelijkingen van de eerste orde: er komen geen hogere afgeleiden in voor, alleen de eerste afgeleide. Verder zijn ze lineair omdat ze beide zijn te schrijven als $a \cdot y' + b \cdot y + c = 0$. Er komen dus geen vermenigvuldigingen, delingen of machten van y en y' voor.

Als a, b en c constanten zijn, kun je dergelijke lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde oplossen door het scheiden van de variabelen.

Opgave 1

Welke van de volgende differentiaalvergelijkingen is een lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde? Los in dat geval de differentiaalvergelijking op.

a $\frac{dy}{dx} = xy^2$ met $y(0) = 2$.

b $f'(x) - 3 \cdot f(x) = 2$ met $f(0) = 1$.

c $\frac{dy}{dx} = 5y$ met $y(0) = 4$.

Opgave 2

Een lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde ziet er in het algemeen uit als $ay' + by + c = 0$ met $a \neq 0$.

a Los deze differentiaalvergelijking op.

b Hoe zien de grafieken van de oplossingsfuncties van deze differentiaalvergelijking er uit?

Uitleg 2

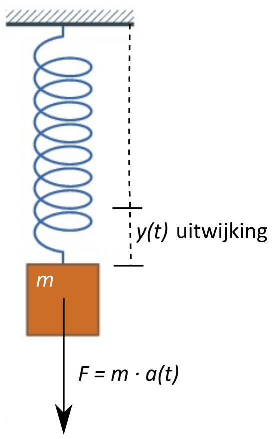
Je ziet hier een plaatje van een gewichtje aan een veer. Met de luchtweerstand wordt geen rekening gehouden, dus er geldt de wet van Hooke:

$F = m \cdot a(t) = -k \cdot y(t)$

Hierin is:

- m de massa van het gewichtje in kg;
- $a(t)$ de versnelling die het gewichtje ondervindt onder invloed van de zwaartekracht en de veerkracht;
- k een positieve constante afhankelijk van de veer (materiaal, uitrekbaarheid);
- $y(t)$ de uitwijking van het gewichtje uit de evenwichtsstand in m;
- F de kracht die op het gewichtje werkt in N (newton);

De versnelling $a(t)$ is de verandering van de snelheid $v(t)$ en de snelheid is de verandering van de uitwijking $y(t)$ op een bepaald tijdstip t. De versnelling is daarom de tweede afgeleide van de uitwijking.



Figuur 3

Daarom levert de wet van Hooke deze differentiaalvergelijking op:

$m \cdot y''(t) = -k \cdot y(t)$

Hierin komt de tweede afgeleide van $y(t)$ voor en geen hogere afgeleiden. Verder is de uitdrukking weer lineair. Dit is een voorbeeld van een lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde. In het algemeen hebben die de gedaante

$a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = d$

Vaak is in de praktijk $d = 0$ en dan spreek je van een homogene lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde. Als a, b en c constanten zijn is zo'n differentiaalvergelijking systematisch op te lossen, in de opgaven ga je dat nader bekijken. Je begint meestal met in

$a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$

de functie $y = A \cdot e^{kt}$ met zijn afgeleide $y' = Ak \cdot e^{kt}$ en tweede afgeleide $y'' = Ak^2 \cdot e^{kt}$ in te vullen:

$A\,e^{kt}\left(ak^2 + bk + c\right) = 0$

De vergelijking $ak^2 + bk + c = 0$ heet de bijbehorende karakteristieke vergelijking en heeft twee (eventueel gelijke) oplossingen voor k, die je k_1 en k_2 kunt noemen. De algemene oplossing is dan $y = A_1\,e^{k_1 t} + A_2\,e^{k_2 t}$.

Omdat k_1 en k_2 complexe getallen kunnen zijn wordt in dat geval een beroep gedaan op je kennis daarvan.

Opgave 3

Bekijk de differentiaalvergelijking $m \cdot y''(t) = -k \cdot y(t)$ uit **Uitleg 2**.

a Laat zien dat dit een homogene lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde is.

b Waarom is zo'n differentiaalvergelijking van de tweede orde niet op te lossen door variabelen scheiden?

Je weet, dat het gewichtje heen en weer blijft bewegen, dat er een sinusoïde als grafiek van $y(t)$ ontstaat.

c Laat zien dat $y = a\sin(bt + c)$ aan de differentiaalvergelijking voldoet en bepaal b.

d Hoe bepaal je de waarden van k, a en c in de praktijk van het massa-veer-systeem?

Opgave 4

Bekijk de homogene lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde $y''(t) - 2y' = 3y$.

a Vul in $y = A \cdot e^{kt}$ en bepaal de karakteristieke vergelijking bij deze differentiaalvergelijking.

b Welke twee getallen k_1 en k_2 vind je?

De algemene oplossing wordt $y(t) = A_1\,e^{k_1 t} + A_2\,e^{k_2 t}$.

c Laat zien dat deze algemene oplossing met de gevonden waarden voor k_1 en k_2 inderdaad aan de differentiaalvergelijking voldoet.

d Hoe kun je waarden voor A_1 en A_2 bepalen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde** kun je schrijven als:

$a \cdot y' + b \cdot y = c$

Alleen as a, b en c constanten zijn, kun je dergelijke differentiaalvergelijkingen oplossen door de variabelen te scheiden.

Een **lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde** kun je schrijven als:

$a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = d$

Als $d = 0$ heet de differentiaalvergelijking **homogeen**.
Alleen als a, b en c constanten zijn, kun je een homogene lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde oplossen door in te vullen $y = A \cdot \mathrm{e}^{kt}$ en zijn eerste en tweede afgeleide. Je krijgt dan de **karakteristieke vergelijking** $ak^2 + bk + c = 0$, die meestal twee oplossingen k_1 en k_2 heeft. De algemene oplossing heeft dan de vorm $y = A_1 \mathrm{e}^{k_1 t} + A_2 \mathrm{e}^{k_2 t}$. Omdat k_1 en k_2 complexe getallen kunnen zijn heb je hierbij kennis nodig van het rekenen met dergelijke getallen, met name gebruik je de formule van Euler. Het geval dat $k_1 = k_2$ blijft voor nu buiten beschouwing.

Voorbeeld 1

Gegeven is de lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} + 2y = 5$.

Los deze differentiaalvergelijking op.

Antwoord

Je kunt de differentiaalvergelijking schrijven als $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = -2y + 5$.

Je kunt daarom de variabelen scheiden:

$\frac{1}{-2y+5} \mathrm{d}\,y = \mathrm{d}\,x$

Door integreren vind je: $-\frac{1}{2} \ln|-2y + 5| = x + C$, waarin C een willekeurige constante is.

Dit kun je herleiden naar: $y = A\,\mathrm{e}^{-2x} + 2{,}5$.

Je moet nog wel even nagaan hoe het zit met $A = 0$.

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** zie je hoe een lineaire diferentiaalvergelijking van de eerste orde wordt opgelost.

a Maak het bijbehorende lijnelementenveld met behulp van GeoGebra. Ga na, dat de gevonden oplossingsfuncties inderdaad in dat richtingsveld passen.

b Voer zelf de herleiding uit en let daarbij goed op de waarden die de constanten mogen aannemen.

c Laat zien, dat ook $A = 0$ een oplossing van de diferentiaalvergelijking oplevert.

Opgave 6

Als je een glas melk vanuit de koelkast (temperatuur 6 °C) in een kamer zet waarin de temperatuur hoger is (kamertemperatuur bijvoorbeeld 20 °C), dan wordt de melk warmer. Uit de natuurkunde is bekend dat de temperatuurtoename recht evenredig is met het temperatuurverschil met de omgeving. Daarom kun je een continu dynamisch model maken voor het opwarmen van de melk dat er zo uitziet:

$T'(t) = c \cdot (20 - T(t))$.

Neem aan dat $c = 0{,}15$, dat t in uren is en dat $T(0) = 6$ °C.

a Laat zien, dat dit een lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde is.

b Los deze differentiaalvergelijking op.

c Bereken de temperatuur van de opwarmende melk na 2 uur.

Voorbeeld 2

Gegeven is de lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde $y'' + 2y' - 8y = 0$.

Verder is $y'(0) = 5$ en $y(0) = 0$.

Los deze differentiaalvergelijking op.

Antwoord

Bij een homogene differentiaalvergelijking van de tweede orde begin je met de substitutie $y = A\,\mathrm{e}^{kt}$.

Als je deze functie samen met zijn eerste en tweede afgeleide in de differentiaalvergelijking invult, krijg je de karakteristieke vergelijking: $k^2 + 2k - 8 = 0$.

Dit geeft: $k_1 = 2$ en $k_2 = -4$.

De algemene oplossing is dan $y = A\,\mathrm{e}^{2x} + B\,\mathrm{e}^{-4x}$.

Uit de twee gegeven randvoorwaarden bereken je A en B.

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** zie je hoe een lineaire diferentiaalvergelijking van de tweede orde wordt opgelost.

a Waarom is deze lineaire diferentiaalvergelijking van de tweede orde homogeen?

b Waarom zijn er nu twee randvoorwaarden nodig?

c Bereken de waarden van A en B.

Opgave 8

Gegeven is de homogene lineaire diferentiaalvergelijking van de tweede orde $2y'' + y' = 3y$.

a Los deze differentiaalvergelijking op.

b Neem aan dat $y(0) = 4$ en $y'(0) = 9$. Bepaal de oplossingsfunctie die aan deze twee randvoorwaarden voldoet.

Voorbeeld 3

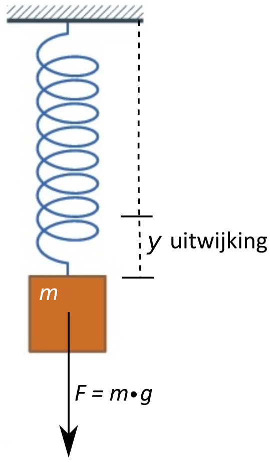
Voor een massa aan een veer die zonder wrijving heen en weer trilt, geldt de differentiaalvergelijking:

$m \cdot y''(t) = -k \cdot y(t)$

Hierin is:

- m de massa van het gewichtje in kg;
- k een positieve constante afhankelijk van de veer (materiaal, uitrekbaarheid);
- $y(t)$ de uitwijking van het gewichtje uit de evenwichtsstand in m;

Laat zien hoe je deze differentiaalvergelijking kunt oplossen.



Figuur 4

Antwoord

Dit is een homogene differentiaalvergelijking van de tweede orde, dus je begint met de substitutie $y = A\,\mathrm{e}^{pt}$. (k is hier de veerconstante, vandaar de p.)

Als je deze functie samen met zijn eerste en tweede afgeleide in de differentiaalvergelijking invult, krijg je de karakteristieke vergelijking: $mp^2 = -k$.

Hieruit vind je twee waarden p_1 en p_2.

Dit zijn complexe getallen omdat $k > 0$ en $m > 0$ en je dus de wortel uit een negatief getal moet trekken.

De algemene oplossing is dan $y = A\,\mathrm{e}^{p_1 t} + B\,\mathrm{e}^{p_2 t}$.

Maar hieraan valt nog flink te rekenen met behulp van de formule van Euler: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)$.

Opgave 9

Bekijk de differentiaalvergelijking $m \cdot y''(t) = -k \cdot y(t)$ uit **Voorbeeld 3**. Denk om het werken met complexe getallen.

a Vul in $y = A \cdot \mathrm{e}^{pt}$ en bepaal de karakteristieke vergelijking bij deze differentiaalvergelijking. (k is hier de veerconstante, vandaar de p.)

b Welke twee complexe getallen p_1 en p_2 vind je?

Gebruik de formule van Euler om de algemene oplossing te herleiden.

c Laat zien dat je het reële deel van de algemene oplossing kunt schrijven als sinusoïde.

Opgave 10

Bij een massa-veer-systeem is ook sprake van luchtweerstand. De bijbehorende differentiaalvergelijking wordt daardoor:

$m \cdot y''(t) + c \cdot y'(t) + k \cdot y(t) = 0$

waarin $c > 0$ de dempingsconstante (in kg/s) is.

a Vul in $y = A \cdot \mathrm{e}^{pt}$ en bepaal de karakteristieke vergelijking bij deze differentiaalvergelijking. (k is hier de veerconstante, vandaar de p.)

b Welke twee getallen p_1 en p_2 vind je? En wanneer zijn dit complexe getallen?

Neem aan dat de veerconstante $k = 25$ N/m, $m = 0{,}5$ kg en $c = 1$ kg/s.

c Laat zien dat je het reële deel van de algemene oplossing kunt schrijven als ‘sinusoïde met een afnemende amplitude’.

Verwerken

Opgave 11

Bepaal bij de volgende lineaire differentiaalvergelijkingen eerst of ze van de eerste of de tweede orde zijn. Los ze vervolgens op op.

a $y' - 0{,}25y = 0$ met $y(0) = 2$.

b $y'' - 0{,}25y = 0$ met $y(0) = 2$ en $y'(0) = 5$.

c $2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ met $y(0) = 0$ en $y'(0) = 6$.

Opgave 12

Als je pas gezette kop koffie (temperatuur 70 °C) in een kamer zet met een temperatuur van 20 °C), dan koelt de koffie af. De temperatuurafname is recht evenredig met het temperatuurverschil met de omgeving. Je krijgt zo de differentiaalvergelijking:

$T'(t) = c \cdot (T(t) - 20)$.

Neem aan dat $c = -0{,}3$, dat t in uren is en dat $T(0) = 70$ °C.

a Los deze differentiaalvergelijking op.

b Bereken na hoeveel uur de temperatuur van de koffie is gehalveerd.

Opgave 13

Als een voorwerp alleen onder invloed van de zwaartekracht valt, dan geldt: $F = m \cdot a = -m \cdot g$.

Hierin is m de massa in kg, $a(t) = y''(t)$ de versnelling en g de gravitatieconstante, die op aarde ongeveer 9,8 m/s bedraagt.

Neem aan dat $y(0) = 100$ en $y'(0) = 0$.

a Welke lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde krijg je dus?

b Waarom is deze differentiaalvergelijking niet homogeen?

c Je kunt de differentiaalvergelijking oplossen door direct te integreren. Laat zien dat je vindt: $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + a \cdot t + b$.

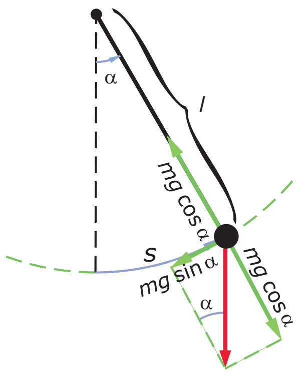
d Bereken a en b met behulp van de randvoorwaarden. Leg uit wat het resultaat natuurkundig betekent.

Opgave 14

Een **mathematische slinger** is een (niet bestaanbare) ideale slinger. Hij is het best te benaderen door een naar verhouding kleine loden kogel aan een lange, sterke maar ragdunne draad te hangen. Als je de kogel uit zijn evenwichtsstand brengt en loslaat gaat hij slingeren. Bij de ideale slinger neem je dan aan, dat de draad geen massa heeft en geen luchtweerstand ondervindt.

De kogel wordt voortbewogen door een component van de zwaartekracht, waarvoor volgens de tweede wet van Newton geldt: $F = m \cdot a \cdot - mg\sin(\alpha)$.

- a is de versnelling (in m/s^2), de afgeleide van de snelheid v (in m/s), die de afgeleide van de afgelegde weg s (in m) is;
- m is de massa in g;
- g is de zwaartekrachtversnelling;
- α is de hoek van de draad met de evenwichtsstand (in rad).



Figuur 5

α hangt af van de tijd t (in s). Verder is $s = l\sin(\alpha)$ met l in m. $\sin(\alpha) \approx \alpha$ voor kleine hoeken. Voor $\alpha(t)$ geldt: $l \cdot \alpha''(t) = -g \cdot \alpha(t)$. Deze differentiaalvergelijking is op te lossen met behulp van complexe getallen. Het reële deel van de oplossingsfunctie is de sinusoïde die de beweging van de kogel beschrijft.

a Welke homogene lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde krijg je dus?

b Los de differentiaalvergelijking op met behulp van complexe getallen.

c Laat zien dat het reële deel van de oplossingsfunctie een sinusoïde is.

Opgave 15

Gegeven is de homogene lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde $y'' - 2y' + y = 0$.

Neem aan dat $y(0) = 10$ en $y'(0) = 5$.

a Welke karakteristieke vergelijking heeft deze differentiaalvergelijking? Welk probleem doet zich dan voor?

b Ga na, dat nu zowel $y = A \cdot \mathrm{e}^x$ als $y = Bx \cdot \mathrm{e}^x$ oplossingen zijn van deze differentiaalvergelijking.

De functie $y = A \cdot \mathrm{e}^x + Bx \cdot \mathrm{e}^x$ is de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking.

c Licht toe hoe dit uit b volgt.

d Bereken A en B vanuit de gegeven randvoorwaarden.

Testen

Opgave 16

Los de volgende lineaire differentiaalvergelijkingen op.

a $y' = 4y - 2$ met $y(0) = 10$.

b $y'' - 6y' + 8y = 0$ met $y(0) = 10$ en $y'(0) = 5$.

Opgave 17

Bij een massa-veer-systeem met demping hoort de differentiaalvergelijking:

$2 \cdot y''(t) + 2 \cdot y'(t) + 5 \cdot y(t) = 0$

a Vul in $y = A \cdot \text{e}^{kt}$ en bepaal de karakteristieke vergelijking bij deze differentiaalvergelijking.

b Welke twee getallen k_1 en k_2 vind je?

c Bepaal het reële deel van de algemene oplossing met behulp van de formule van Euler voor complexe getallen.

d Hoe zie je aan het reële deel van de algemene oplossing dat er van een gedempte trilling sprake is?

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.