3.3 Variabelen scheiden

Inleiding

Sommige types differentiaalvergelijking zijn systematisch op te lossen. Daar bestaan verschillende technieken voor die wiskundige in de loop der jaren (eeuwen) hebben bedacht. Eén van die methode is het scheiden der variabelen.

Je leert in dit onderwerp

- een differentiaalvergelijking oplossen door het scheiden van de variabelen.

Voorkennis

- het begrip continu dynamisch model en de bijbehorende differentiaalvergelijkingen, het begrip oplossing van een differentiaalvergelijking;
- oplossingen van differentiaalvergelijkingen controleren;
- de oplossingen van een differentiaalvergelijking benaderen met de methode van Euler;
- de oplossingen van een differentiaalvergelijking zoeken met behulp van een richtingsveld (lijn-elementenveld).

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de differentiaalvergelijking $f'(x) = x \cdot f(x)$.

Je kunt hem schrijven als $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = x \cdot y$.

a Probeer uit te leggen waarom je dit kunt schrijven als $\frac{1}{y}\mathrm{d}\,y = x\,\mathrm{d}\,x$.

b Hoe kun je dit gebruiken om de gegeven differentiaalvergelijking op te lossen?

c Probeer deze differentiaalvergelijking op te lossen.

Uitleg

Van bepaalde types differentiaalvergelijking kun je de oplossingen systematisch vinden. Omdat in een differentiaalvergelijking ook afgeleiden voorkomen, ligt het voor de hand om te bedenken dat je vanuit een afgeleide de functie kunt terugvinden door primitiveren. Het eerste idee is dan ook om de integraalrekening in te zetten.

Bekijk bijvoorbeeld de differentiaalvergelijking $f'(x) = x \cdot f(x)$ maar eens.

Je kunt dit ook schrijven als $y' = x \cdot y$, want $f(x) = y$.

Hier kun je van maken $\frac{y'}{y} = x$

Je hebt nu de variabelen gescheiden en je kunt gaan integreren. Op een constante na zijn de primitieven links en rechts van het isgelijkteken ook gelijk:

$\int \frac{y'}{y}\,\mathrm{d}\,x = \int x\,\mathrm{d}\,x + C$, waarin C een willkeurig getal is.

Rechts van het isgelijkteken kun je primitiveren: $\int x\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}x^2$.

Maar hoe zit het links van het isgelijkteken?

Daar moet je bedenken dat $y' = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ als $\Delta x \to 0$. En dus is $y'\Delta x = \Delta y$ als $\Delta x \to 0$.

Om aan te geven dat $\Delta x \to 0$ schrijf je niet langer meer Δx en Δy, maar $\mathrm{d}\,x$ en $\mathrm{d}\,y$.
Zo vind je $y'\,\mathrm{d}\,x = \mathrm{d}\,y$.

En dus wordt de differentiaalvergelijking na integreren $\int \frac{1}{y} \mathrm{d}\,y = \int x \,\mathrm{d}\,x + C$.

Primitiveren geeft: $\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C$.

Dit kun je schrijven als $|y| = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+C} = K \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$ met $K = \mathrm{e}^C > 0$.

Zonder absoluutstrepen wordt dit $y = \pm K\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$ met $K > 0$.

Nog korter zijn de oplossingen $y = A\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$ met $A \neq 0$.

Omdat $y = 0$ een oplossing van deze differentiaalvergelijking is (ga dat na), kun je $A \neq 0$ weglaten.

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe de differentiaalvergelijking $f'(x) = x \cdot f(x)$ wordt opgelost.

a Wat wordt bedoeld met ‘variabelen scheiden’?

Je kunt de differentiaalvergelijking ook schrijven als $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = x \cdot y$.

b Laat zien dat je hier meteen $\frac{1}{y}\mathrm{d}\,y = x\,\mathrm{d}\,x$ van kunt maken als je met $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$ rekent alsof het een gewone breuk is.

c Waarom wordt dit in de uitleg niet zo gedaan?

d Voer zelf de herleiding naar $y = a\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$ nog een keer uit. Let goed op hoe er met de constante wordt omgegaan.

Opgave 2

Bekijk de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = x^2 \cdot y$.

a Laat zien dat je dit kunt herleiden naar $\int \frac{1}{y}\mathrm{d}\,y = \int x^2 \,\mathrm{d}\,x + C$

b Los nu de differentiaalvergelijking op en laat zien dat de oplossingen hyperbolen zijn.

Opgave 3

Bekijk de differentiaalvergelijking $f'(x) = \frac{x+1}{f(x)}$.

a Laat zien dat je dit kunt herleiden naar $\int y\,\mathrm{d}\,y = \int (x+1)\,\mathrm{d}\,x + C$

b Los nu de differentiaalvergelijking op en laat zien dat de oplossingen hyperbolen zijn.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Soms kun je een differentiaalvergelijking waarin de variabelen x, y en y' voorkomen schrijven in een vorm waarin y en y' alleen links van het isgelijkteken voorkomen en x alleen rechts daarvan. Je noemt dat **scheiden van de variabelen**.

Daarna kun je de differentiaalvergelijking oplossen door links en rechts van het isgelijkteken te integreren, waarbij je gebruik maakt van

$y'\,\mathrm{d}\,x = \mathrm{d}\,y$

Na het primitiveren herleid je de oplossing naar de vorm $y = ...$ als dat mogelijk is.

Je kunt deze techniek eenvoudiger opschrijven door meteen $y' = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$ te schrijven en met deze uitdrukking te rekenen alsof het een gewone breuk zou zijn. (Wat natuurlijk niet zo is!)

Voorbeeld 1

Gegeven is de differentiaalvergelijking $H'(t) = 2t + 3$.

Los deze differentiaalvergelijking op.

Antwoord

Je kunt de differentiaalvergelijking schrijven als $H' = 2t + 3$.

In deze differentiaalvergelijking zijn de variabelen al gescheiden. Je kunt $H(t)$ meteen vinden door primitiveren.

$H(t) = \int 2t + 3 \, \mathrm{d}t + C = t^2 + 3t + C$

Hierin is C een willekeurige constante.

Opgave 4

Bekijk de differentiaalvergelijking in **Voorbeeld 1**.

a Waarom hoef je daarbij niet meer de variabelen te scheiden?

b Welke oplossing van deze differentiaalvergelijking voldoet aan $H(2) = 15$?

Opgave 5

Een aantal van deze differentiaalvergelijkingen kun je oplossen door rechtstreeks integreren, zoals in het voorbeeld is te zien. Geef bij elk ervan aan of dit mogelijk is en bepaal dan de oplossingen ervan.

a $f'(x) = x^2 - 3x$

b $f'(x) = x^2 - 3f(x)$

c $C'(t) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}3t}$

d $H'(t) = H(t) \cdot \cos(2t)$

Voorbeeld 2

Gegeven is de differentiaalvergelijking $f'(x) = 2 \cdot (f(x))^2$.

Los deze differentiaalvergelijking op door de variabelen te scheiden. Schrijf de oplossingen als functies.

Antwoord

Schrijf eerst de differentiaalvergelijking als $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y^2$.

Vervolgens ga je zo te werk:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2y^2 && \\
& && \text{variabelen scheiden} \\
\frac{\mathrm{d}y}{y^2} &= 2\,\mathrm{d}x && \\
& && \text{beide zijden integreren} \\
\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y &= \int 2\,\mathrm{d}x + C && \\
& && \text{primitiveren} \\
\frac{-1}{y} &= 2x + C && \\
& && \text{herleiden} \\
y &= \frac{-1}{2x + C} &&
\end{aligned}$$

Hierin is C een willekeurige constante.

Bij het delen door y^2 heb je wel moeten aannemen dat $y \neq 0$. En dus moet je even nagaan of $y = 0$ een oplossing van deze differentiaalvergelijking is. En dat blijkt inderdaad zo te zijn. De complete oplossing is daarom:

$f(x) = \frac{-1}{2x + C} \vee f(x) = 0$ met C een willekeurig getal.

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** zie je hoe een differentiaalvergelijking wordt opgelost door de variabelen te scheiden. Bekijk nu de differentiaalvergelijking $f'(x) = (2x + 3) \cdot f(x)$.

a Los deze differentiaalvergelijking op.

b Laat zien dat je de oplossing kunt schrijven als $f(x) = A\,\mathrm{e}^{x^2+3x}$, waarin A een willkeurige constante is.

c Welke oplossing van deze differentiaalvergelijking voldoet aan de randvoorwaarde $f(0) = 15$?

Opgave 7

Ga na of van de onderstaande differentiaalvergelijkingen de variabelen te scheiden zijn. Los ze vervolgens volledig op.

a $f'(x) = x^2 \cdot f(x) + f(x)$

b $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{xy}{x+y}$

c $H'(t) = 5 - H(t)$

Verwerken

Opgave 8

Gegeven de differentiaalvergelijking $C'(t) = k \cdot (C_v - C(t))$, waarin k en C_v constanten zijn.

a Los deze differentiaalvergelijking op.

b Neem nu $k = 0{,}02$, $C_v = 10$ en $C(0) = 0$ en bereken $C(20)$.

Opgave 9

Los de volgende differentiaalvergelijkingen op.

a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy^2$ met $y(0) = 2$.

b $f'(x) = f(x) \cdot \sin(x)$ met $f(0) = 1$.

c $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{y}{x}}$ met $y(1) = 4$.

Opgave 10

Gegeven is de differentiaalvergelijking $f'(x) = \frac{-4x}{f(x)}$.

De grafieken van de oplossingen van deze differentiaalvergelijking zijn ellipsen.

a Maak met behulp van GeoGebra het richtingsveld bij deze differentiaalvergelijking en laat zien door de grafiek van een oplossing te tekenen dat dit inderdaad ellipsen lijken te zijn.

b Bepaal door scheiden van de variabelen de vergelijkingen van deze ellipsen.

c Welke van deze ellipsen gaat door het punt $(5,0)$?

Opgave 11

Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$.

a Maak met behulp van GeoGebra het richtingsveld bij deze differentiaalvergelijking. Hoe zien de grafieken van de oplossingen van deze differentiaalvergelijking er uit?

b Bepaal door scheiden van de variabelen de oplossingen van deze differentiaalvergelijking.

Opgave 12

Een kegelvormige kaars is 20 cm hoog. De diameter van de grondcirkel van de kegel is 10 cm. $A(h)$ is de oppervlakte van een cirkelvormige doorsnede van de kegel op een hoogte h boven het grondvlak.

a Laat zien dat $A(h) = \frac{1}{16}\pi \cdot (20 - h)^2$.

Op tijdstip $t = 0$ wordt de kaars aangestoken. Je mag veronderstellen dat de snelheid $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ waarmee de kaars korter wordt omgekeerd evenredig is met de oppervlakte van de doorsnede van de kaars op hoogte h.

b Stel een differentiaalvergelijking op voor de hoogte h. Noem de constante daarin c.

c Los de gevonden differentiaalvergelijking op.

d De kaars is na 8 uur opgebrand, bereken c.

Toepassen

Opgave 13: Olielaag

Op het water van een rechthoekig zwembad van 3 bij 5 m drijft een laag olie. Deze olie verdampt. De snelheid waarmee de olie verdampt is van verschillende factoren afhankelijk: de omgevingstemperatuur, de oppervlakte die de olie bedekt en de dikte van de olielaag. Hoe verandert nu het volume V in de tijd t (in uren) als je de volgende aannames doet?

- De olie bedekt steeds het zwembad totdat de dikte van de olielaag kleiner dan 0,001 m is, op dat moment ‘breekt’ de olielaag uit elkaar.
- De omgevingstemperatuur blijft constant.
- Op tijdstip $t = 0$ heeft de olielaag een dikte van 0,01 m.
- De snelheid waarmee het volume afneemt is recht evenredig met de dikte van de olielaag.

a Stel een differentiaalvergelijking voor het volume van de olie op gebaseerd op de genoemde aannames.

b Neem als evenredigheidsconstante 7,5, los de differentiaalvergelijking op en bereken het tijdstip waarop de olielaag ‘breekt’.

Testen

Opgave 14

Los de differentiaalvergelijking $f'(x) = 10 - 2 \cdot f(x)$ op.

Opgave 15

De differentiaalvergelijking $H'(t) = -0{,}1 \cdot H(t)$ beschrijft het vervalproces van een hoeveelheid H in de tijd t.

a Los deze differentiaalvergelijking op.

b Bepaal de oplossing waarvoor geldt $H(0) = 10$ minuut.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@xs4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.