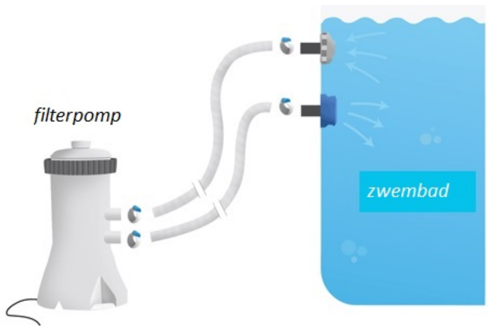
3.1 Continue dynamische modellen

Inleiding

Een bijzonder type wiskundige modellen dat veel voorkomt is het dynamische model. Daarbij worden rekenmodellen opgesteld van de veranderingen van de situatie met de tijd. En daarmee wordt dan gerekend, of (als de situatie niet te complex is) er wordt geprobeerd één of meer formules af te leiden waarmee de toestand op elk tijdstip kan worden bepaald. Als dit rekenmodel niet een verandering in vaste tijdstappen, maar een continue verandering in de tijd beschrijft, spreek je van een continu dynamisch model. De vergelijkingen waaruit het model bestaat zijn dan differentiaalvergelijkingen.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- het begrippen continu dynamisch model, differentiaalvergelijking en oplossing van een differentiaalvergelijking;
- oplossingen van differentiaalvergelijkingen controleren.

Voorkennis

- werken met formules van rijen, directe formules en recursieformules, ook met de grafische rekenmachine;
- differentievergelijkingen en hun oplossingen bepalen in bepaalde situaties.

Verkennen

Opgave V1

In een zwembad is op zeker moment de chloorconcentratie 1 liter/m^3. Dat is te hoog en dus wordt het water ververst. Elk uur wordt 60 m^3 water vervangen door 60 m^3 schoon water. Er zit in totaal 1000 m^3 water in het zwembad.

a Bereken na hoeveel uur de chloorconcentratie is gehalveerd.

b Je kunt ook de stapgrootte niet in uren nemen, maar in bijvoorbeeld minuten. Wat verandert er dan?

c En wat gebeurt er als je de stapgrootte naar 0 laat naderen?

Uitleg 1

In een zwembad is op zeker moment de chloorconcentratie 1 L/m^3. Dat is te hoog en dus wordt het water ververst. Elk uur wordt 60 m^3 water vervangen door 60 m^3 schoon water. Er zit in totaal 1000 m^3 water in het zwembad.

Noem de chloorconcentratie $C(t)$ waarin t de tijd in uren is en C in L/m^3.
Ga ervan uit dat het schone water zich onmiddellijk met al het badwater vermengt, zodat $C(t)$ in het hele zwembad steeds op een bepaald tijdstip hetzelfde is.
Elk uur wordt de chloorconcentratie met $\Delta C(t) = 0{,}060 \cdot C(t)$ verminderd.

Dan geldt de modelvergelijking: $C(t+1) = C(t) - 0{,}060 \cdot C(t) = 0{,}940 \cdot C(t)$

De chloorconcentratie op $t = 0$ (als het verversen van het water begint) is $C(0)$.

Voer deze formule in op de grafische rekenmachine. Uit de grafiek of de tabel blijkt dat de halveringstijd ongeveer 11 uur is.

In werkelijkheid wordt er echter voortdurend water ververst, dit gebeurt niet in tijdstappen. Die tijdstappen moeten kleiner worden, naar 0 naderen.

Neem je de tijdstap bijvoorbeeld Δt uur dan wordt $\Delta C(t) = 0{,}060 \cdot C(t) \cdot \Delta t$ en de modelvergelijking $C(t + \Delta t) = C(t) - 0{,}060 \cdot C(t) \cdot \Delta t$.

Deze modelvergelijking kun je schrijven als $C(t + \Delta t) - C(t) = -0{,}060 \cdot C(t) \cdot \Delta t$.

En dus als: $\frac{C(t+\Delta t)-C(t)}{\Delta t} = -0{,}060 \cdot C(t)$.

Nu is $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{C(t+\Delta t)-C(t)}{\Delta t} = C'(t)$.

Als $\Delta t \to 0$ wordt de modelvergelijking $C'(t) = -0{,}060 \cdot C(t)$.

Zo'n vergelijking noem je een differentiaalvergelijking.

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** het verhaal van het verversen van het water in een zwembad.

a Licht toe hoe je aan de differentievergelijking $C(t + 1) = C(t) - 0{,}060 \cdot C(t)$ komt en laat zien dat de halveringstijd van de chloorconcentratie dan iets meer dan 11 uur is.

b Laat zien dat de differentievergelijking nu $C(t + 1) = C(t) - 0{,}001 \cdot C(t)$ wordt. Bereken de halveringstijd nauwkeuriger.

Opgave 2

In het zwembadprobleem waren de instroomsnelheid en de uitstroomsnelheid beide 60 m^3 per uur. Neem nu eens aan dat die instroom/uitstroomsnelheid gelijk is aan 120 m^3 per uur.

a Stel de bijbehorende differentievergelijking voor willekeurige stapgrootte Δt op.

b Bepaal de bijbehorende halveringstijd als $\Delta t = 1$.

c Je wilt de bijbehorende halveringstijd bepalen als $\Delta t = \frac{1}{60}$. Waarom gaat dit niet met de differentievergelijking bij b en de grafische rekenmachine? Laat zien hoe je dit kunt oplossen.

Opgave 3

Je ziet in **Uitleg 1** dat (bij t in uren) de stapgrootte Δt naar 0 wordt gebracht.

a Licht toe hoe je aan de differentiaalvergelijking $C'(t) = -0{,}060 \cdot C(t)$ komt.

b Het verloop van $C(t)$ wil je weten, wat is dus de oplossing van zo'n differentiaalvergelijking?

Uitleg 2

In een zwembad is op zeker moment de chloorconcentratie 1 liter/m^3. Dat is te hoog en dus wordt het water ververst. Elk uur wordt 60 m^3 water vervangen door 60 m^3 schoon water. Er zit in totaal 1000 m^3 water in het zwembad.

Hiervoor heb je de differentiaalvergelijking $C'(t) = -0{,}060 \cdot C(t)$ afgeleid, met t in uren.

Je wilt weten hoe $C(t)$ verloopt, dus een formule voor $C(t)$ opstellen die voor elke waarde van t voldoet aan de differentiaalvergelijking. Dat is voor de meeste differentiaalvergelijkingen niet eenvoudig. Maar je hebt op je grafische rekenmachine gezien dat de differentievergelijking met stapgrootte 1 een exponentieel verval laat zien. Bovendien lijkt de exponentiële functie het meest op zijn afgeleide.

Neem je bijvoorbeeld $C(t) = e^{-0{,}06t}$ dan is $C'(t) = -0{,}06 \cdot e^{-0{,}06t} = -0{,}06 \cdot C(t)$ voor elke waarde van t.

De functie $C(t) = e^{-0{,}06t}$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking. Maar beslist niet de enige oplossing.

Ga na dat alle functies van de vorm $C(t) = C(0) \cdot e^{-0{,}06t}$ met $C(0)$ een constante, oplossing zijn van deze differentiaalvergelijking.

Vanuit de randvoorwaarde dat de concentratie 1 liter/m^3 is op $t = 0$, kun je $C(0)$ bepalen.

Opgave 4

In **Uitleg 2** wordt beweerd dat alle functies van de vorm $C(t) = C(0) \cdot e^{-0,06t}$ oplossing zijn van de differentiaalvergelijking $C'(t) = -0,060 \cdot C(t)$.

a Bepaal de afgeleide van $C(t)$ en laat zien dat de functies $C(t)$ voor elke waarde van t voldoen aan de differentiaalvergelijking.

b Wat stelt $C(0)$ voor in deze situatie?

c Hoe groot is $C(0)$ in de beschreven situatie?

Opgave 5

Ook functies van de vorm $C(t) = b \cdot g^t$ zijn oplossing van de differentiaalvergelijking $C'(t) = -0,060 \cdot C(t)$.

a Bepaal de afgeleide van $C(t)$ en laat zien dat de functies $C(t)$ voor elke waarde van t voldoen aan de differentiaalvergelijking als je voor g de juiste waarde kiest.

b Neem $C(0) = 1$ L/m^3? Welke oplossing van de gegeven differentiaalvergelijking past daar bij?

c Bereken nu de halveringstijd vanuit de gevonden oplossing.

d Bereken de halveringstijd als de randvoorwaarde is dat de concentratie chloor op $t = 0$ dubbel zo hoog is.

e Hoe lang duurt het bij de nieuwe randvoorwaarde tot de concentratie chloor weer onder de 0,5 L/m^3 is?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **continu dynamisch model** is een rekenmodel voor een praktische situatie die met de tijd (die continu voortschrijdt) verandert. Zo'n model bestaat uit:

- variabelen die met de tijd veranderen;
- modelformules zoals $f'(t) = a \cdot f(t) + b$ (of ingewikkelder) waarin $f(t)$ een functie en t de tijd voorstelt;
- randvoorwaarden zoals een beginwaarde.

De modelformules heten **differentiaalvergelijkingen**. In een differentiaalvergelijking tref je behalve een functie ook de afgeleide of de tweede afgeleide van die functies aan.

De **oplossing van een differentiaalvergelijking** bestaat uit alle formules voor de functie $f(t)$ die er voor elke toegestane waarde van t voldoen. Vaak zijn dat meerdere formules van een bepaalde gedaante. Met behulp van de **randvoorwaarden** kun je bepalen welke van alle mogelijke oplossingen bij de specifieke situatie behoort.

Voorbeeld 1

Als je een glas melk vanuit de koelkast (temperatuur 6 °C) in een kamer zet waarin de temperatuur hoger is (kamertemperatuur bijvoorbeeld 20 °C), dan wordt de melk warmer. Uit de natuurkunde is bekend dat de temperatuurtoename per tijdseenheid recht evenredig is met het temperatuurverschil met de omgeving. Daarom kun je een discreet dynamisch model maken voor het opwarmen van de melk dat er zo uitziet:

$T(t + \Delta t) - T(t) = c \cdot (20 - T(t)) \cdot \Delta t$

Zet deze differentievergelijking om in een differentiaalvergelijking door $\Delta t \to 0$ te nemen.

Antwoord

Schrijf eerst de differentievergelijking als $\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t} = c \cdot (20 - T(t))$

Neem nu de limiet voor $\Delta t \rightarrow 0$ en je vindt:

$T'(t) = c \cdot (20 - T(t))$.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Licht de differentievergelijking die is gegeven toe.

b Waarom is het in dit model nu nog niet belangrijk in welke eenheid de tijd wordt gemeten?

c Neem t in minuten, $c = 0{,}2$ en $\Delta t = 1$ en bereken het verloop van de opwarming in de eerste 10 minuten.

Opgave 7

Je haalt een fles cola uit de koelkast (temperatuur 8 °C) en zet dit in een ruimte met een temperatuur van 19 °C). Hierbij kun je een vergelijkbaar dynamisch model maken als in **Voorbeeld 1**.

a Schrijf eerst de bijbehorende differentievergelijking op.

b Als t wordt gemeten in minuten, is de evenredigheidsconstante gelijk aan 0,4. Stel de bijpassende differentiaalvergelijking op.

Voorbeeld 2

Als je een glas melk vanuit de koelkast (temperatuur 6 °C) in een kamer zet waarin de temperatuur hoger is (kamertemperatuur bijvoorbeeld 20 °C), dan wordt de melk warmer. Uit de natuurkunde is bekend dat de temperatuurtoename per tijdseenheid recht evenredig is met het temperatuurverschil met de omgeving. Daarom kun je een continu dynamisch model maken voor het opwarmen van de melk dat er zo uitziet:

$T'(t) = c \cdot (20 - T(t))$

Aan deze differentievergelijking voldoen functies van de vorm $T(t) = 20 - a \cdot \text{e}^{-ct}$, waarin a een constante is. Laat zien dat dit klopt.

Antwoord

Door differentiëren vind je $T'(t) = ac \cdot \text{e}^{-ct}$.

Vul nu $T'(t)$ en $T(t)$ in de differentiaalvergelijking in. Je vindt:

$ac \cdot \text{e}^{-ct} = c \cdot \left(20 - \left(20 - a \cdot \text{e}^{-ct}\right)\right)$

Ga na, dat aan beide zijden van het isgelijkteken voor elke waarde van t hetzelfde staat.

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Laat zien dat de gegeven functie inderdaad aan de differentiaalvergelijking voldoet.

b Neem t in minuten en $c = 0{,}2$. Welke serie oplossingen heeft de differentiaalvergelijking dan?

c Hoe kun je a berekenen?

d Bereken vervolgens de tijd die nodig is om de melk een temperatuur van 12 °C te laten bereiken.

Opgave 9

De snelheid waarmee in een zwembad gechloord water wordt vervangen door schoon water, heet de spoelsnelheid. Ga uit van een spoelsnelheid van 2 m^3 per minuut en een beginconcentratie van 1 L/m^3.

a Stel de bijbehorende differentiaalvergelijking op.

b Laat zien dat bij deze differentiaalvergelijking functies van de vorm $C(t) = C(0) \cdot \text{e}^{-0{,}002t}$ passen

c Bereken $C(0)$.

d Bereken vervolgens de tijd die nodig is om de chloorconcentratie te halveren.

Verwerken

Opgave 10

Bepaal de differentiaalvergelijkingen bij de volgende differentievergelijkingen:

a $H(t+\Delta t) = H(t) + 3 \cdot (t + H(t)) \cdot \Delta t$

b $N(t+\Delta t) = N(t) + 5 \cdot \Delta t \cdot N(t) - 2 \cdot \Delta t \cdot (N(t))^2$

c $f(x+\Delta x) = f(x) + x \cdot f(x) \cdot \Delta x$

Opgave 11

Als het licht door een bepaald materiaal (bijvoorbeeld een glasplaat) gaat, neemt de intensiteit ervan voortdurend af. Die intensiteitsafname is recht evenredig met de intensiteit aan het begin van een gepasseerde laag materiaal. Noem de intensiteit van het licht $I(d)$ waarin d de dikte van de gepasseerde laag materiaal is in m. Bekijk eerst wat er gebeurt in stappen van $\Delta d = 1$ m.

a Laat zien, dat dan geldt: $I(d+1) = I(d) - k \cdot I(d)$, waarin k een evenredigheidsconstante is die afhangt van het materiaal.

b Neem aan dat $k = 0{,}2$ en $I(0) = 100$ bereken $I(1)$, $I(2)$, $I(3)$, $I(4)$ en $I(5)$.

c Leidt een directe formule af voor $I(d)$ en bereken met behulp daarvan na hoeveel m de lichtintensiteit is gehalveerd.

Neem nu een stapgrootte van Δd. Ga nog steeds uit van $k = 0{,}2$.

d Stel de bijpassende differentievergelijking op en leidt daaruit de bijbehorende differentiaalvergelijking af.

e Toon aan dat functies van de vorm $I(d) = I(0) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}2d}$ oplossingen zijn van deze differentiaalvergelijking.

f Neem weer $I(0) = 100$ en bereken de waarde van d waarna de lichtintensiteit is gehalveerd..

Opgave 12

Als je een kop koffie uit een koffiezetter haalt, dan is de koffie meestal gloeiend heet. Neem aan dat de koffie 90 °C is.
Breng je die koffie in een kamer met een binnentemperatuur van 20 °C , dan koelt hij af. De temperatuurafname van de koffie is recht evenredig met het temperatuurverschil met de omgeving.
Gebruik voor de tijd (min) de variabele t en voor de temperatuur van de koffie (°C) de variabele T.
Neem om te beginnen een stapgrootte van $\Delta t = 1$ minuut.

a Stel een passende modelformule op; c is de evenredigheidsconstante.

Neem $c = 0{,}1$.

b Maak voor de eerste vijf minuten een tabel van de temperatuur van de koffie.

c Bereken na hoeveel minuten de temperatuur van de koffie is gezakt tot onder de 50 °C.

d Stel een differentiaalvergelijking bij dit probleem op, neem weer $c = 0{,}1$.

e Toon aan dat functie van de vorm $T(t) = 20 + k \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1t}$ oplossingen zijn van deze differentiaalvergelijking.

f Gebruik $T(0) = 90$ en bereken na hoeveel tijd de temperatuur van de koffie 25 °C is geworden.

Opgave 13

Gegeven is de differentiaalvergelijking $y'(t) = t \cdot y(t)$. Er geldt $y(0) = 1$.

a Laat zien dat de volgende functies geen oplossingen van deze differentiaalvergelijking zijn: $y_1(t) = 0$, $y_2(t) = 1$, $y_3(t) = t + 1$ en $y_4(t) = \cos(t)$.

b Functies van de vorm $y_5(t) = c \cdot \mathrm{e}^{0{,}5t^2}$ zijn oplossing van deze differentiaalvergelijking. Laat dit zien en bepaal voor welke waarde van c dan ook aan de randvoorwaarde $y(0) = 1$ is voldaan.

Opgave 14

Een patiënt krijgt via een infuus een medicijn toegediend met een constante snelheid van 12 mg/uur. Het lichaam breekt dit medicijn af met een snelheid die recht evenredig is met de al in het bloed aanwezige hoeveelheid medicijn. Noem de in het bloed aanwezige hoeveelheid medicijn $M(t)$, waarbij t de tijd in uren is en $M(0) = 0$ mg.

a Stel voor dit proces een passende differentievergelijking op.

b Leid uit de gevonden differentievergelijking een differentiaalvergelijking af.

c Laat zien dat $M(t) = \frac{1}{c} \cdot \left(12 - k \cdot \mathrm{e}^{-ct}\right)$ een oplossing van deze differentiaalvergelijking is.

d Neem $c = 0{,}15$ en bereken k vanuit de randvoorwaarde.

e Hoeveel medicijn zit er op de lange duur in het lichaam?

Testen

Opgave 15

Bij een bepaald dynamisch proces hoort de differentievergelijking $H(t + \Delta t) = H(t) + \frac{H(t)}{t} \cdot \Delta t$. Verder is gegeven dat $H(2) = 10$.

a Welke differentiaalvergelijking kun je bij dit dynamisch proces opstellen?

b Toon aan dat functies van de vorm $H(t) = a \cdot t$ oplossingen zijn van de gevonden differentiaalvergelijking.

c Bereken de juiste waarde van a vanuit de gegeven randvoorwaarde.