2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu alle theorie van **Discrete dynamische modellen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- dynamisch model — discreet dynamisch model — modelformules — parameter
- webgrafiek en tijdgrafiek — convergente en divergente rij — dekpunt
- differentievergelijking, oplossing ervan — lineaire differentievergelijking van de eerste orde — kwadratische differentievergelijking van de eerste orde — logistische groei
- stelsels differentievergelijkingen
- lineaire differentievergelijking van de tweede orde — karakteristieke vergelijking

Activiteitenlijst

- een discreet dynamisch model beschrijven met recursieformules
- de webgrafiek van een rij maken — dekpunt(en) berekenen — convergentie/divergentie onderzoeken
- lineaire differentievergelijking van de eerste orde onderzoeken en oplossen — kwadratische differentievergelijking van de eerste orde onderzoeken
- werken met stelsels differentievergelijkingen
- lineaire differentievergelijking van de tweede orde doorrekenen en oplossen

Achtergronden

Een heel bijzondere differentievergelijking is de logistische differentievergelijking

$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$

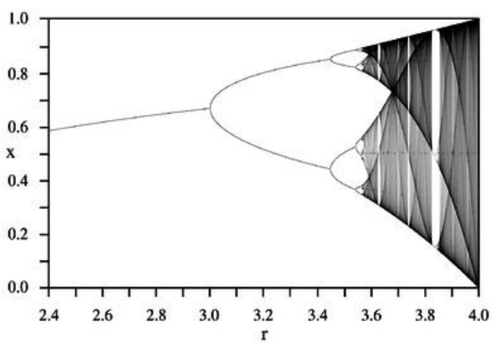
met parameter r in [0,4] en een beginwaarde x_0.

Deze differentievergelijking is bestudeerd door de Amerikaanse mathematisch fysicus **Mitchell Feigenbaum** (1944 - 2019).

Figuur 1

De logistische differentievergelijking vertoont het volgende bijzondere gedrag:

1. Tot $r = 3$ convergeert de rij naar het dekpunt $1 - \frac{1}{r}$.
2. Voor $3 < r < 1 + \sqrt{6} \approx 3{,}44949$ oscilleert de rij tussen twee waarden zonder te convergeren.
3. Voor $3{,}44949 < r \leq 3{,}54409$ is er een cyclus van vier waarden waartussen de rij heen en weer springt.
4. Na ongeveer 3,54409 wordt het een cyclus van acht waarden en vervolgens steeds weer een verdubbeling. Dit proces heet bifurcatie. In de figuur zie je er een weergave van. Het verloop van de iteraties wordt steeds chaotischer.



Figuur 2 bron: Wikipedia

Dit gedrag is ook in andere situaties verder onderzocht in de chaostheorie.

Testen

Opgave 1

Onderzoek bij de differentievergelijkingen of de bijbehorende rijen convergeren of divergeren en bereken de eventuele grenswaarden.
Geef ook bij de lineaire differentievergelijkingen een directe formule.

a $u(t) = 5 + 1{,}4u(t-1)$ met $u(0) = 4$

b $H_{t+1} = 2{,}6 \cdot H_t \cdot (1 - H_t)$ met $H_0 = 0{,}4$

c $v(n) = \text{-}\,0{,}85v(n-1) + 2$ met $v(0) = 8$

Opgave 2

Een populatie vissen in een meertje wordt bij benadering voorspeld door het logistische groeimodel. De differentievergelijking luidt:

$$V(t) = V(t-1) + 0{,}4 \cdot V(t-1) \cdot \left(1 - \frac{V(t-1)}{2000}\right)$$

waarin $V(t)$ het aantal vissen als functie van de tijd in jaar voorstelt. De periode van dit model is 1 jaar. Op $t = 0$ zijn er 50 van deze vissen in het meertje.

a Plot de webgrafiek bij deze differentievergelijking.

b Ontstaat er een evenwichtssituatie? Zo ja, hoeveel vissen zullen er dan op de lange duur in dit meertje zitten?

c Plot een tijdgrafiek voor $V(t)$ als $V(0) = 10$. Doe hetzelfde voor $V(0) = 100$. Welk verschil is er tussen beide grafieken?

Opgave 3

Een viskwekerij heeft een bepaald bassin waarin maximaal 5000 meervallen kunnen leven. De kweker zet daarin 1000 meervallen uit. Het aantal meervallen zal dan groeien, maar omdat er maximaal 5000 meervallen in het bassin kunnen leven, zal de groei afnemen naarmate het aantal meervallen dichter bij de 5000 komt. De kweker veronderstelt daarom dat de toename van het aantal meervallen per jaar recht evenredig is met het verschil tussen het aantal meervallen en het maximale aantal van 5000: $\Delta N_t = c \cdot (5000 - N_t)$, waarin N_t het aantal meervallen na t jaar is.

a Toon aan dat de veronderstelling van de kweker leidt tot een groeimodel met als bijbehorende differentievergelijking: $N_{t+1} = (1-c) \cdot N_t + 5000c$

b Na een jaar zijn er ongeveer 1600 meervallen in het bassin. Bereken c.

c Vanaf welk moment neemt het aantal meervallen minder snel toe?

d Is er nu sprake van een logistisch groeimodel?

Opgave 4

Bekijk de lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde. Welke zijn oplosbaar? Bepaal in dat geval de exacte oplossing.

a $u(t) = u(t-1) + 6u(t-2)$ met $u(0) = 1$ en $u(1) = 1$

b $v(t) = v(t-1) - 6v(t-2)$ met $v(0) = 2$ en $v(1) = 8$

c $w(t) = 6w(t-1) - 9w(t-2)$ met $w(0) = 4$ en $w(1) = 5$

Opgave 5

In een bepaald prooi-roofdier-model gelden de formules

$P(t) = P(t-1) + (0{,}20 - a \cdot R(t-1)) \cdot P(t-1)$

en

$R(t) = R(t-1) - (0{,}10 - b \cdot P(t-1)) \cdot R(t-1)$.

Op $t = 0$ is het aantal prooidieren $P(0) = 4500$ en het aantal roofdieren $R(0) = 300$. Een maand later op $t = 1$ zijn die aantallen $P(1) = 4725$ en

$R(1) = 297$.

a Laat zien dat dit betekent dat $a = 0{,}0005$ en $b = 0.00002$.

b Als $P(t) = P(t-1) = P$ en $R(t) = R(t-1) = R$, dan is het aantal prooidieren en het aantal roofdieren in stabiel evenwicht. Bereken de waarden P en R. Welke betekenis hebben deze waarden?

c Hoeveel roofdieren zijn er wanneer het aantal prooidieren voor het eerst na de start van deze tellingen een maximum bereikt?

Opgave 6

Een bedrijf wil reclame maken via de lokale omroep. Deze omroep heeft elk uur een reclameblok waarin de reclame van dit bedrijf kan worden opgenomen. Om 6:00 uur 's ochtends begint de eerste uitzending. Er worden dan zo'n 18000 mensen bereikt van de 500000 die dagelijks op deze omroep afstemmen. Men denkt elk uur zo'n extra 5% van de tot dan toe nog niet bereikte mensen de reclame te kunnen laten horen.

a Stel een discreet dynamisch model op voor $B(t)$, het aantal mensen dat t uur na aanvang van de reclameblokken is bereikt.

b Hoeveel mensen hebben op zijn laatst om 12:00 uur de reclame gehoord?

c Stel een directe formule op voor de rij $B(t)$.

d Het laatste reclameblok is om 23:00 uur. Hoeveel mensen hebben in de loop van deze dag de reclame gehoord?

Toepassen

Opgave 7: Macro-economische modellen

Economen gebruiken een grote hoeveelheid variabelen om de economie van een bepaald land te beschrijven, zoals:

- de effectieve vraag EV;
- de particuliere investeringen I;
- de particuliere comsumptie C;
- het nationaal inkomen Y;
- de belastinginkomsten B;
- de overheidsuitgaven O.

Uiteraard kun je nog meer variabelen invoeren. Tussen al deze variabelen bestaat een verband dat wordt beschreven in een zogenaamd macro-economisch model.
De effectieve vraag is bijvoorbeeld vaak gelijk aan de som van de particuliere consumptie, de particuliere investeringen en de overheidsuitgaven: $EV = C + I + O$.

Hier zie je als voorbeeld een macro-economisch model waarin de overheid geen rol speelt.

- $EV_t = C_t + I_t$
- $C_t = 0{,}6 \cdot Y_{t-1} - 9$
- $I_t = 29$
- $Y_t = EV_t$

Bij de variabelen EV, C, I en Y gaat het om miljarden euro. De tijd t is in jaren.

a Waaraan zie je dat de particuliere consumptie afhangt van het nationaal inkomen van het voorgaande jaar?

b Laat zien dat uit deze modelformules volgt: $Y_t = 0{,}6 \cdot Y_{t-1} + 20$.

c Laat zien dat het nationaal inkomen in dit model naar een bepaalde grenswaarde toegroeit door een bijpassende directe formule op te stellen.

Een ander macro-economisch model luidt als volgt:

- $C_t = 0{,}8(Y_{t-1} - B_{t-1})$
- $I_t = 30$
- $B_t = \frac{1}{3}Y_t - 400$
- $O_t = 10$
- $Y_t = C_t + I_t + O_t$

Bij de variabelen C, Y, B, I en O gaat het om miljarden euro. De tijd t is in jaren. Neem aan dat $Y_0 = 1200$.

d Beschrijf dit model in woorden en stel voor Y_t zowel een differentievergelijking als een directe formule op. Wat gebeurt er op de lange duur met het nationaal inkomen?

Opgave 8: Nationaal inkomen

In de afgelopen 20 jaar is het wereldinkomen (het totale inkomen van alle mensen samen) sneller gegroeid dan de wereldbevolking. Dat betekent dat het gemiddeld inkomen per hoofd van de bevolking is gestegen. In de theorie van de economische groei spelen de kapitaalgoederen een belangrijke rol. Bij kapitaalgoederen kun je bijvoorbeeld denken aan machines. De kapitaalgoederen hebben een grote invloed op de productie. Hier zie je een eenvoudig model voor economische groei:

Figuur 3

- $I_t = S_t$.
  I_t zijn investeringen in jaar t; S_t zijn besparingen in jaar t. De investeringen zijn steeds gelijk aan de besparingen.
- $I_t = K_{t+1} - K_t$.
  K_t is hoeveelheid kapitaalgoederen in jaar t. De investeringen leiden uitsluitend tot uitbreiding van de kapitaalgoederen.
- $S_t = s \cdot Y_t$.
  Y_t is het nationaal inkomen in jaar t. De besparingen zijn steeds een vast gedeelte van het nationaal inkomen; s heet de spaarquote.
- $K_t = k \cdot Y_t$.
  De hoeveelheid kapitaalgoederen is gelijk aan k keer de productiecapaciteit. Omdat wordt aangenomen dat de productiecapaciteit volledig worden benut, is de productiecapaciteit gelijk aan het nationaal inkomen; k heet de kapitaalcoëfficiënt.

Kies $s = 0{,}3$, $k = 2$ en $K_0 = 200$. Alle bedragen zijn steeds in miljoenen dollars.

a Toon aan dat volgens het model geldt: $K_{t+1} = 1{,}15 \cdot K_t$.

b Voor welke t geldt dat het nationaal inkomen Y_t voor het eerst boven de 1 miljard dollar komt? Licht je antwoord toe.

De spaarquote en de kapitaalcoëfficiënt bepalen de groei van het nationaal inkomen. Ontwikkelingslanden hebben lage gemiddelde inkomens en kunnen nauwelijks sparen: s is laag. In de figuur zie je dat dit leidt tot een vicieuze cirkel van armoede.

c Toon aan dat ook volgens het model geldt: als s afneemt, dan neemt de groei van het nationaal inkomen af.

(bron: voorbeeldexamen vwo wiskunde A1,2 uit 1998)

Email: f.spijkers@math4all.nl