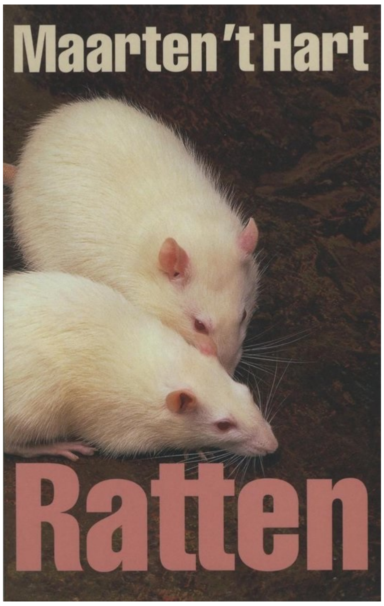
2.5 Hogere orde

Inleiding

In zijn boek ‘Ratten’ beschrijft Maarten 't Hart de nakomelingen van een paartje ratten. Hij vraagt zich af hoeveel nakomelingen een rattenpaar zou hebben na een jaar als elk vruchtbaar paartje om de 40 dagen 6 nakomelingen krijgt, 3 mannetjes en 3 vrouwtjes die dus 3 paartjes vormen. Elk rattenpaar krijgt pas na 120 dagen voor het eerst nakomelingen, maar is dan een vruchtbaar paartje geworden. Hij kwam tot 1808 ratten, een heel rattenleger...



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- kennismaken met (lineaire) differentievergelijkingen van hogere orde en de oplossing ervan.

Voorkennis

- werken met formules van rijen, directe formules en recursieformules;
- werken veranderingen, toenames en differentiequotiënten.

Verkennen

Opgave V1

Uit ‘Ratten’ van Maarten 't Hart:

> Ook over de hoeveelheid nakomelingen van een rattenpaar in een jaar worden zeer verschillende getallen verstrekt. In het volgende hoofdstuk zal ik de schaarse gegevens van onderzoek over de vruchtbaarheid van ratten in de natuur bespreken, maar het is misschien wel aardig hier een schatting te maken van het aantal nakomelingen van 1 paar, uitgaande van de meest optimale omstandigheden. Daartoe gebruik ik de volgende gegevens. Gemiddeld is het aantal jongen per worp te stellen op zes; van deze 6 behoren er 3 tot het vrouwelijk geslacht. Gemakshalve stel ik de periode tussen twee bevallingen op veertig dagen. Als nu een vrouwtje op 1 januari bevalt van 6 jongen, is dat vrouwtje 40 dagen later opnieuw in staat om 6 jongen ter wereld te brengen. De vrouwtjes van de eerste worp van 6 jongen zijn zelf na 120 dagen in staat nakomelingen voort te brengen, daarna steeds weer om de 40 dagen. Als ik er dan van uit ga dat er bij elke worp steeds 3 vrouwtjes zijn en als ik alle nakomelingen optel van alle vrouwtjes in 1 jaar, dan kom ik op 1808 ratten op 1 januari van het volgende jaar, het oorspronkelijke paar meegerekend. Dit is een fictief getal: er is sterfte, moeders verwerpen soms hun jongen, vrouwtjes komen soms lange tijd niet in de oestrus. Niettemin geeft dit getal enig idee van het leger ratten dat na een jaar ontstaan kan zijn...

Laat zien hoe 't Hart aan dat totaal van 1808 is gekomen.

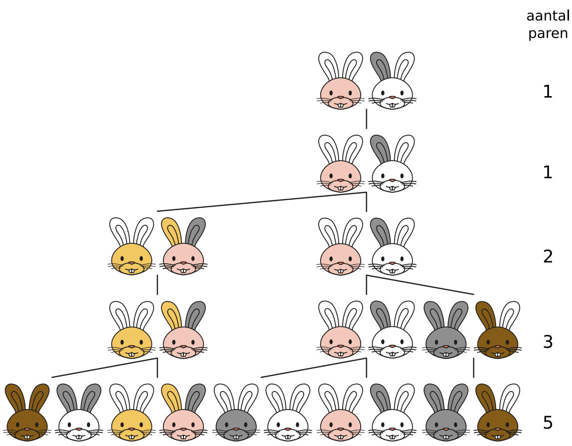
Uitleg

De rij van Fibonacci is: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Elke term van deze rij (behalve de eerste twee) ontstaat door de twee voorgaande op te tellen. De bijpassende recursieformule is:

$u(t) = u(t-1) + u(t-2)$ met $u(0) = 1$ en $u(1) = 1$

In deze lineaire recursieformule worden de voorgaande term en de term die aan de voorgaande voorafgaat gebruikt, daarom is dit een lineaire differentievergelijking van de tweede orde.



Figuur 2

Het probleem met recursieformules is dat de rij vanaf het begin moet worden opgebouwd. Het is niet eenvoudig om de directe formule in dit geval te vinden. Als je naar deze rij kijkt, dan zie je dat er sprake is van een snelle groei. Het ligt daarom voor de hand om te veronderstellen dat een directe formule de vorm $u(t) = a \cdot g^t$ zou kunnen hebben, met $a \neq 0$ en $g \neq 0$.
Vul je dit in de recursieformule in, dan krijg je: $a \cdot g^t = a \cdot g^{t-1} + a \cdot g^{t-2}$
Beide zijden vermenigvuldigen met g^2 geeft $a \cdot g^{t+2} = a \cdot g^{t+1} + a \cdot g^t$ en hieruit volgt $g^2 = g + 1$.

Met de abc-formule vind je: $g = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee g = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Je vindt twee waarden voor g en a kan kennelijk van alles zijn (ongelijk aan 0). Maar directe formules zoals $u(t) = a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t$ of $u(t) = a \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t$ leveren niet de gewenste rij van Fibonacci op.

Je krijgt de juiste rij door een combinatie van beide te proberen:

$u(t) = a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t$, waarin je a en b berekent vanuit de gegeven startwaarden.

Deze directe formule is de oplossing van de differentievergelijking.

Opgave 1

Bekijk de rij van Fibonacci in de **Uitleg**. De recursieformule is $u(t) = u(t-1) + u(t-2)$ met $u(0) = 1$ en $u(1) = 1$.

a Plot de tijdgrafiek van de rij van Fibonacci met $u(n\text{Min}) = \{1,1\}$.

b Wat is de twintigste term van de rij?

In de uitleg wordt geprobeerd een directe formule bij deze lineaire differentievergelijking van de tweede orde te maken.

c Laat zien dat $u(t) = a \cdot g^t$ leidt tot $g^2 = g + 1$.

d Laat zien hoe je hieruit g berekent.

e Leg uit dat $u(t) = a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t$ geen goede rij oplevert.

f Bekijk nu $u(t) = a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t + b \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t$. Bereken a en b vanuit de twee startwaarden en noteer de juiste directe formule voor de rij van Fibonacci.

Opgave 2

De rij $u(t) = 2 \cdot u(t-1) + 3 \cdot u(t-2)$ met $u(0) = 1$ en $u(1) = 2$ is ook een lineaire differentievergelijking van de tweede orde.

a Maak deze rij met de grafische rekenmachine.

b Op dezelfde manier als voor de rij van Fibonacci kun je door $u(t) = a \cdot g^t$ te substitueren mogelijke waarden van g vinden. Welke waarden zijn dat?

c Stel vervolgens een geschikte directe formule op voor deze rij.

Opgave 3

De rij $u(n) = a \cdot u(n-1) + b \cdot u(n-2)$ is de algemene vorm van een lineaire differentievergelijking van de tweede orde. Er zijn ook twee startwaarden nodig, bijvoorbeeld $u(0)$ en $u(1)$.

a In de **Uitleg** wordt gesuggereerd dat hierbij een directe formule past van de vorm $u(n) = p \cdot (g_1)^n + q \cdot (g_2)^n$ waarin g_1 en g_2 de oplossingen zijn van de vergelijking $g^2 = ag + b$. Bewijs dat dit waar is door deze uitdrukking voor $u(n)$ te substitueren in de recursieformule.

b In het bewijs wordt verondersteld dat de vergelijking $g^2 = ag + b$ twee oplossingen heeft. Is dat altijd het geval? Wanneer niet?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een recursieformule van de vorm $u(t) = a \cdot u(t-1) + b \cdot u(t-2)$ noem je een **lineaire differentievergelijking van de tweede orde**. De bijbehorende directe formule vind je door:

- $u(t) = g^t$ te substitueren in de recursieformule;
- de **karakteristieke vergelijking** $g^2 = ag + b$ op te lossen.

Als deze karakteristieke vergelijking twee verschillende oplossingen g_1 en g_2 heeft, dan is $u(t) = p \cdot (g_1)^t + q \cdot (g_2)^t$ de oplossing van de lineaire differentievergelijking. De waarden van p en q vind je uit de twee gegeven startwaarden van de rij.

Heeft de karakteristieke vergelijking maar één oplossing, dan ga je anders te werk. De oplossing is dan:

$u(t) = (p + q \cdot t) \cdot g^t$, waarin je p en q kunt berekenen uit de startwaarden.

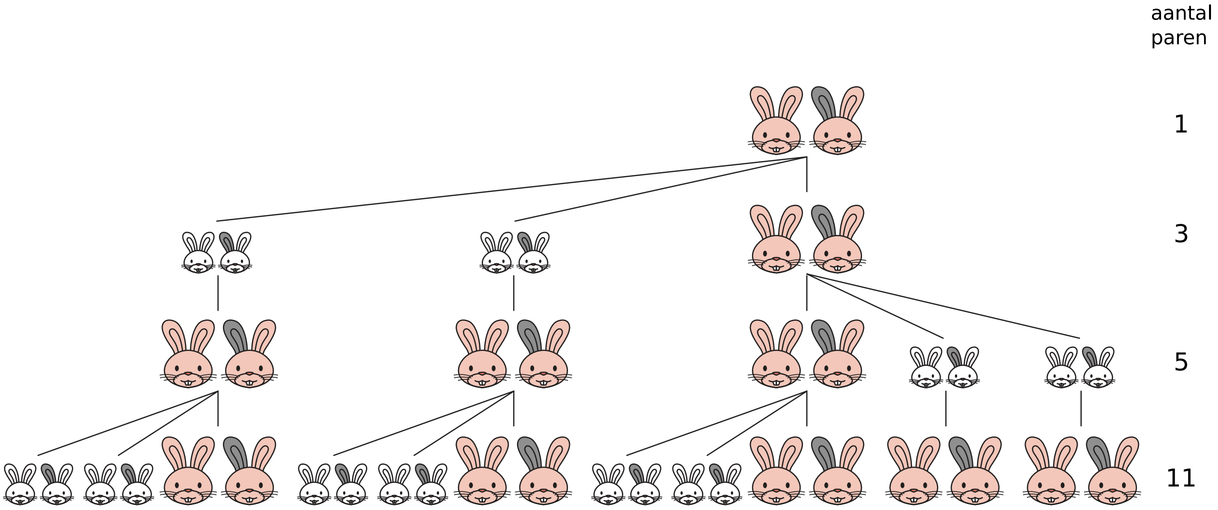
Als de karakteristieke vergelijking geen reële oplossingen heeft, dan kun je voorlopig geen directe formule vinden.

Je zegt ook wel dat de directe formule een oplossing is van de differentievergelijking.

Voorbeeld 1

De rij van Fibonacci is vooral bekend geworden om zijn voorbeeld met de voortplanting van konijnen. Een variant op zijn voorbeeld kent de volgende aannames:

- Gemiddeld krijgt elk paar konijnen na een maand precies vier jongen, twee vrouwtjes en twee mannetjes die daarom precies twee paartjes vormen.
- Een pasgeboren vrouwtjeskonijn kan een maand lang geen nakomelingen produceren.



Figuur 3

Ga ervan uit dat je met één konijnenpaartje start, dat na een maand twee paren nakomelingen heeft (gemiddeld). Stel een lineaire differentievergelijking van de tweede orde op voor dit voortplantingsmodel. Bepaal daarbij een directe formule, dus de oplossing van deze differentievergelijking.

Antwoord

Maak eerst een tabel voor de eerste maanden, houd de paartjes die voor jongen kunnen zorgen en de paren die dit niet kunnen goed uit elkaar.

maand	vruchtbare paren	jonge paren	totaal
0	1		1
1	1	2	3
2	3	2	5
3	5	6	11
4	11	10	21

Tabel 1

Je vindt de lineaire differentievergelijking: $K(t) = K(t-1) + 2 \cdot K(t-2)$ met $K(0) = 1$ en $K(1) = 3$.

Voor een directe formule begin je met het substitueren van $K(t) = g^t$. Dit geeft de karakteristieke vergelijking $g^2 = g + 2$ met oplossing $g = 2 \vee g = -1$.
De oplossing van de differentievergelijking heeft dan de vorm $K(t) = p \cdot 2^t + q \cdot (-1)^t$.

Met behulp van de startwaarden vind je $p = \frac{4}{3}$ en $q = -\frac{1}{3}$.

De bijbehorende directe formule is $K(t) = \frac{4}{3} \cdot 2^t - \frac{1}{3} \cdot (-1)^t$.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1** en het model van de voortplanting van konijnen.

a Maak bij de recursieformule een tabel met de grafische rekenmachine.

b Leid zelf de startwaarden van de directe formule af.

c Maak ook bij de directe formule een tabel met de grafische rekenmachine. Ga na dat die tabel hetzelfde is als die bij de recursieve formule.

Opgave 5

Los de lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde op.

a $u_n = 2u_{n-1} + 3u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_1 = 1$

b $P(t) = 5P(t-1) - 4P(t-2)$ met $P(0) = 5$ en $P(1) = 8$

Opgave 6

Los de lineaire differentievergelijking van de tweede orde exact op.

$v(n) = v(n-1) + 5v(n-2)$ met $v(0) = 1$ en $v(1) = 2$

Voorbeeld 2

Je wilt de lineaire differentievergelijking $u(t) = 4u(t-1) - 4u(t-2)$ met $u(0) = 1$ en $u(1) = 1$ oplossen.
De karakteristieke vergelijking die hierbij hoort, heeft nu slechts één oplossing g. Laat dat zien en ga ook na dat de oplossing van deze differentievergelijking de vorm $u(t) = (p + q \cdot t) \cdot g^t$ heeft, waarin je p en q kunt berekenen uit de startwaarden.

Antwoord

Begin voor een directe formule met het substitueren van $u(t) = g^t$.
Dit geeft de karakteristieke vergelijking $g^2 = 4g - 4$ met oplossing $g = 2$.
De oplossing van de differentievergelijking kan dan niet de vorm $u(t) = p \cdot 2^t$ hebben, want deze vorm voldoet niet aan beide startwaarden.
Een oplossing van de vorm $u(t) = (p + q \cdot t) \cdot 2^t$ is wel mogelijk.
$u(0) = p = 1$ en $u(1) = (p + q) \cdot 2 = 1$ geeft $p = 1$ en $q = -0{,}5$.

De bijbehorende directe formule is $u(t) = (1 - 0{,}5t) \cdot 2^t$.
Ga met de grafische rekenmachine na dat deze rij hetzelfde is als de rij die is gegeven door de oorspronkelijke recursieformule.

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 2** welke vorm de oplossing heeft van een lineaire differentievergelijking van de tweede orde als de bijbehorende karakteristieke vergelijking maar één oplossing heeft.

a Laat zien dat de karakteristieke vergelijking bij de gegeven recursieformule precies één oplossing heeft.

b Laat ook zien dat de gevonden oplossing inderdaad voldoet aan de differentievergelijking door haar in te vullen.

c Ga met de grafische rekenmachine na dat beide rijen hetzelfde opleveren.

Opgave 8

Welke van de volgende lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde kun je oplossen? Geef in dat geval de oplossing.

a $u_n = 3u_{n-1} - 2{,}25u_{n-2}$ met $u_0 = 2$ en $u_1 = 4{,}5$

b $a(t) = 4a(t-1) - 5a(t-2)$ met $a(0) = 5$ en $a(1) = 8$

c $V(t) = V(t-1) + 0{,}5V(t-2)$ met $V(0) = 2$ en $V(1) = 1 + 2\sqrt{3}$

Verwerken

Opgave 9

Bekijk de twee lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde. Los beide op.

a $K(t) = 4K(t-1) + 5K(t-2)$ met $K(0) = 10$ en $K(1) = 20$

b $u_n = 2u_{n-1} + 2u_{n-2}$ met $u_0 = 2$ en $u_1 = 2$

Opgave 10

Niet alle lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde hebben reële oplossingen. Bepaal van het volgende drietal de directe formule als dit kan.

a $H(t) = 4H(t-1) - 5H(t-2)$ met $H(0) = 10$ en $H(1) = 20$

b $K(t) = 4K(t-1) + 5K(t-2)$ met $K(0) = -10$ en $K(1) = 10$

c $u(t) = 6u(t-1) - 9u(t-2)$ met $u(0) = 2$ en $u(1) = 4$

Opgave 11

In een afgesloten gebied leven konijnen. Elke maand krijgt een vruchtbaar vrouwtje gemiddeld zes jongen, drie vrouwtjes en drie mannetjeskonijnen. Deze jonge vrouwtjes kunnen in de eerste maand geen jongen voortbrengen, maar worden vruchtbaar vanaf hun tweede maand.

a Maak een tabel van de eerste zes maanden voor het aantal vrouwtjes afkomstig van één vruchtbaar vrouwtje. Splits deze tabel op in vruchtbare en niet-vruchtbare vrouwtjes.

b Stel een lineaire differentievergelijking van de tweede orde op voor het aantal vrouwtjes afkomstig van één vruchtbaar vrouwtje.

c Bepaal de bijbehorende directe formule.

Opgave 12

Gegeven is de directe formule $u_t = 2^t + 3 \cdot 4^t$.

a Waarom is $(g-2)(g-4) = 0$ een mogelijke bijbehorende karakteristieke vergelijking?

b Stel een recursieformule op die hoort bij de directe formule.

Opgave 13

Gegeven is de lineaire differentievergelijking $u_n = 2u_{n-1} - 2u_{n-2}$ met $u_0 = 1$ en $u_1 = 2$.

a Toon aan dat $u_n = -4u_{n-4}$.

b Bereken u_{16003}.

Opgave 14

Een rij is gegeven door $u(n) = 6u(n-1) - 11u(n-2) + 6u(n-3)$ met $u(0) = 1$, $u(1) = 4$ en $u(2) = 12$.

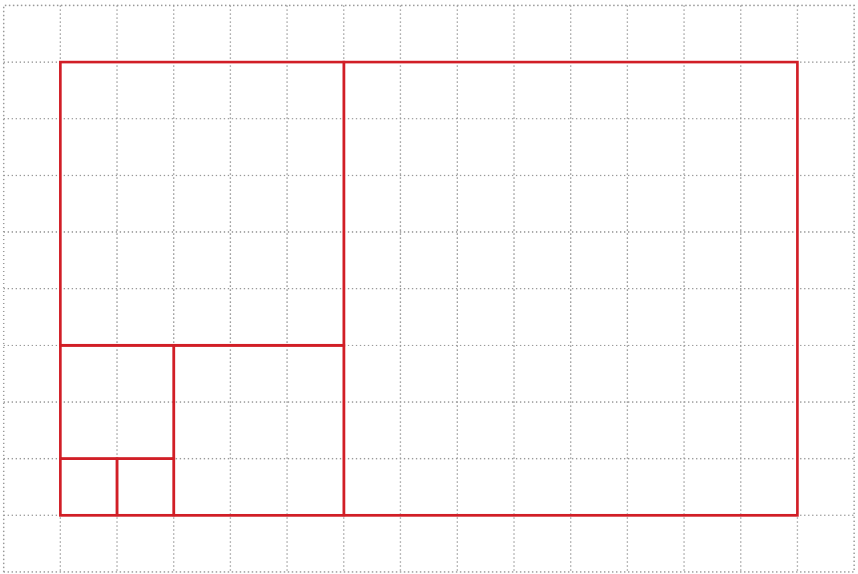
a Bereken de waarden $u(3)$ en $u(4)$.

b Onderzoek of je deze differentievergelijking op dezelfde wijze als een differentievergelijking van de tweede orde kunt oplossen.

Toepassen

Opgave 15: Vierkantjes aanleggen

Bekijk de figuur. Tegen een vierkantje van 1 bij 1 wordt nog zo'n vierkantje aangelegd om een rechthoekje van 2 bij 1 te krijgen. Daar wordt weer een vierkant van 2 bij 2 aangelegd. Je krijgt dan een rechthoek van 2 bij 3. Vervolgens wordt daar een vierkant van 3 bij 3 aangelegd, je krijgt dan een rechthoek van 5 bij 3, enzovoort.



Figuur 4

a Welke rij vormen de lengtes van de opeenvolgende vierkanten?

b Met welke lineaire differentievergelijking van de tweede orde kun je die rij $f(n)$ beschrijven?

c Maak een nieuwe rij waarin je telkens twee opvolgende waarden van de rij van Fibonacci die je bij a hebt gevonden, op elkaar deelt: $v(n) = \frac{f(n)}{f(n-1)}$. Geef daarvan de eerste acht termen.

d De rij $v(n)$ convergeert. Laat dit zien met de grafische rekenmachine. Bepaal ook de grenswaarde in drie decimalen nauwkeurig.

e Bereken exact naar welk getal rij $v(n)$ convergeert.

f De exacte waarde van de grenswaarde van $f(n)$ wordt de ‘gulden snede’ genoemd.

Zoek naar de betekenis van de gulden snede in de kunst en architectuur. Bekijk waar de rij van Fibonacci en de gulden snede in de natuur voorkomen.

Opgave 16: Differentievergelijking van de derde orde

Een rij is gegeven door $u(n) = u(n-1) + u(n-2) + u(n-3)$ met $u(0) = u(1) = u(2) = 1$.
Dit is een voorbeeld van een lineaire differentie vergelijking van de derde orde.

a Schrijf de eerste 10 waarden van deze rij op.

b Onderzoek of je deze differentievergelijking op dezelfde wijze als een differentievergelijking van de tweede orde kunt oplossen.

Een andere rij is gegeven door $u(n) = 6u(n-1) - 8u(n-2) + 6u(n-3)$ met $u(0) = 1$, $u(1) = 4$ en $u(2) = 12$.

c Onderzoek of je deze differentievergelijking op dezelfde wijze als een differentievergelijking van de tweede orde kunt oplossen.

Testen

Opgave 17

Je ziet hier een aantal lineaire differentievergelijkingen van de tweede orde. Welke zijn oplosbaar? Bepaal in dat geval de exacte oplossing.

a $u(t) = -2u(t-1) + 8u(t-2)$ met $u(0) = 2$ en $u(1) = -2$

b $v(t) = -2v(t-1) - v(t-2)$ met $v(0) = 1$ en $v(1) = 2$

c $w(t) = -2w(t-1) - 8w(t-2)$ met $w(0) = 1$ en $w(1) = 1$

Opgave 18

De koningin van de honingbij (Apis Mellifica) legt zowel bevruchte als onbevruchte eitjes. Uit de onbevruchte eitjes groeien darren (mannetjesbijen), uit de bevruchte eitjes groeien vrouwtjesbijen. Eén van die vrouwtjesbijen krijgt heel veel voedsel en wordt de nieuwe koningin, de overige zijn de werksters. Een dar heeft dus één ouder (een moeder). In het tweede geslacht heeft een dar twee voorouders (één grootmoeder en één grootvader, beide van moeders kant). In het derde geslacht heeft hij drie voorouders (twee overgrootmoeders en één overgrootvader).

a Hoeveel voorouders heeft een dar in het tiende geslacht?

b Hoeveel van die voorouders zijn darren, hoeveel zijn koninginnen?