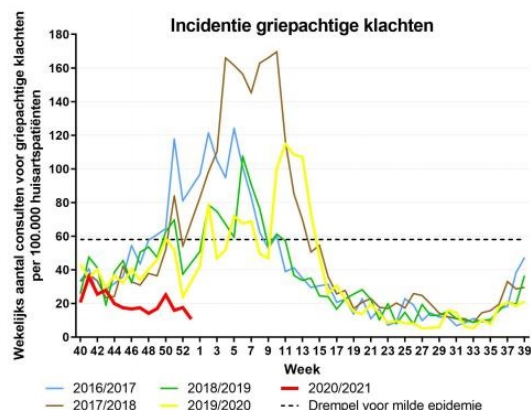


2.4 Stelsels

Inleiding

Bij dynamische modellen gaat het om rekenmodellen van de veranderingen van de situatie met de tijd. En daarmee wordt dan gerekend, of (als de situatie niet te complex is) er wordt geprobeerd één of meer formules af te leiden waarmee de toestand op elk tijdstip kan worden bepaald. Een voorbeeld van een situatie waarin een dynamisch model kan worden opgesteld is de ontwikkeling van een griep-epidemie. Daarbij spelen meerdere modelformules een rol. Het RIVM (Rijksinstituut voor Volksgezondheid en Milieu) houdt de ontwikkeling van het aantal griepgevallen bij.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- werken met dynamische modellen met meerdere modelformules;
- discrete dynamische modellen met meerdere modelformules doorrekenen.

Voorkennis

- werken met (lineaire) differentievergelijkingen, tijdgrafieken en webgrafieken;
- werken met veranderingen, toenames en differentiequotienten.

Verkennen

Opgave V1

Griep is een besmettelijke ziekte die van mens tot mens wordt overgedragen. Als de griep opduikt zijn er gezonde mensen, zieke mensen en mensen die ziek zijn geweest maar beter zijn geworden. Alleen zieken steken gezonde mensen aan. De gemiddelde ziekteduur is 4 dagen, daarna ben je geruime tijd immuun. Je begint op een bepaalde dag met 100000 personen waarvan er 100 ziek en 500 immuun zijn. Hoe verloopt het aantal zieken per dag?

In Excel zijn twee griepmodellen gemaakt. Bekijk eerst dit [eenvoudige griepmodel](#).

- Welke modelformules worden er gebruikt voor de zieken $Z(t)$, de gezonden $G(t)$ en de personen die immuun zijn geworden $I(t)$?
- Waar vind je de in de tekst hierboven genoemde getallen terug in dit eenvoudige griepmodel? Verklaar het model in woorden.
- Zie je al meteen tekortkomingen in dit model?

Uitleg

Griep is een besmettelijke ziekte die van mens tot mens wordt overgedragen. Als de griep opduikt, zijn er gezonde mensen, zieke mensen en mensen die ziek zijn geweest. Alleen zieken steken gezonde mensen aan. De gemiddelde ziekteduur is vier dagen, daarna ben je geruime tijd immuun. Je begint op een bepaalde dag met 100000 personen waarvan er 100 ziek en 500 immuun zijn. Hoe verloopt het aantal zieken per dag?

In het bestand [Eenvoudig griepmodel](#) staan de gegevens van een griep-epidemie van dag tot dag. Bedenk bij het opstellen van een wiskundig model voor het verloop van de griep met welke factoren je rekening moet houden. In dit eenvoudige griepmodel wordt gerekend met: $G(t)$ het aantal gezonde

personen op zeker tijdstip t , $Z(t)$ het aantal zieken op dat tijdstip en $I(t)$ het aantal immune personen op dat tijdstip.

Een dag later zit je op tijdstip $t + 1$. De modelformules zijn hier:

- $G(t + 1) = G(t) - 0,2 \cdot Z(t)$
- $Z(t + 1) = Z(t) - 0,25 \cdot Z(t) + 0,2 \cdot Z(t)$
- $I(t + 1) = I(t) + 0,25 \cdot Z(t)$

Hieruit blijkt dat gemiddeld 20% van het aantal zieken gezonde mensen ook ziek maakt. Ook blijkt dat (omdat de ziekte gemiddeld vier dagen duurt) er dagelijks ongeveer een kwart van de zieken immuun wordt. Dit is slechts een eenvoudig model.

Voor het werkelijke verloop van de griep houd je bijvoorbeeld ook rekening met de kans dat een zieke een gezond iemand ontmoet, de incubatietijd van het virus (de tijd tussen de besmetting en het echt ziek worden) en de vatbaarheid van mensen voor griep.

Dit levert meteen ingewikkelder modelformules op. Wel hebben ze nog steeds dezelfde structuur. Omdat je een dag later op tijdstip $t + 1$ zit, zien alle modelformules er zo uit: $u(t + 1) = u(t) + \Delta u(t)$. Hierin is u een variabele van het model. Je hebt bijvoorbeeld de volgende modelformules:

- $G(t + 1) = G(t) - 0,0002 \cdot G(t) \cdot 0,05 \cdot Z(t)$
- $Z(t + 1) = Z(t) - 0,25 \cdot Z(t) + 0,0002 \cdot G(t) \cdot 0,05 \cdot Z(t)$
- $I(t + 1) = I(t) + 0,25 \cdot Z(t)$

Dit is een stelsel differentievergelijkingen die met elkaar samenhangen.

Het bestand **Verbeterd griepmodel** heeft drie variabelen. Alle constanten erin zijn gebaseerd op aannames. Het zijn in feite parameters van het model, dus getallen die je nog kunt aanpassen. Door die parameters aan te passen kun je het model meer op de werkelijkheid laten lijken.

Opgave 1

Bekijk de beschrijving van het eenvoudige griepmodel in de [Uitleg](#).

- a Beschrijf de drie modelformules in woorden. Vertel ook hoe groot in dit model de kans is dat een zieke iemand anders ziek maakt. Leg zo uit hoe het model in elkaar zit.
- b Welke startwaarden zijn er aangenomen? Kennelijk is dit model alleen enigszins bruikbaar als er al zieken zijn. Waaraan zie je dat?
- c Reken met de modelformules het aantal zieken, gezonde mensen en immune personen op $t = 1$ en $t = 2$ handmatig na.
- d Wat voor invloed heeft het verkleinen van het aantal gezonde mensen op $t = 0$ op het verloop van het aantal zieken?

Opgave 2

Bekijk het verbeterde griepmodel in de [Uitleg](#).

- a De kans dat iemand ziek wordt hangt niet alleen af van het aantal zieken, maar ook van het aantal gezonde mensen. Waarom is dat?
- b Hoe zit het in dit model met het aantal zieken dat weer beter, dus immuun wordt?
- c Reken met de modelformules het aantal zieken, gezonde mensen en immune personen op $t = 1$ en $t = 2$ handmatig na.

Theorie en voorbeelden

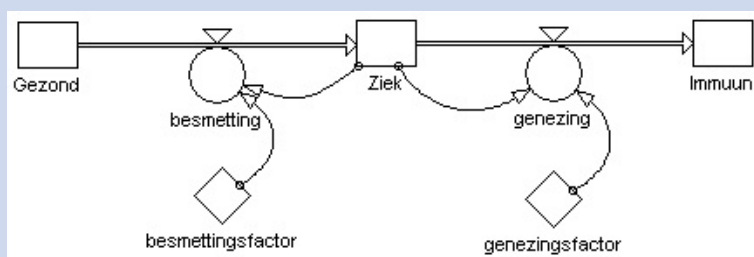
Om te onthouden

Een discreet dynamisch model bestaat vaak uit een heel **stelsel differentievergelijkingen** die met elkaar samenhangen. Er zijn:

- variabelen die met de tijd veranderen;
- meerdere modelformules van de vorm $u(t) = u(t-1) + \Delta u(t)$, waarin u de variabele en t de tijd voorstelt en $\Delta u(t)$ afhangt van u ;
- parameters, constanten die je nog kunt aanpassen.

Die parameters vind je terug in de uitdrukkingen die $\Delta u(t)$, $\Delta v(t)$, ..., beschrijven. Ze zijn vaak gebaseerd op bepaalde modelaannames, bijvoorbeeld een schatting van het percentage dat verandert. Bij ingewikkelder modellen kun je ook de tijdstap aanpassen. Die is dan niet altijd 1, maar wordt aangegeven met Δt of dt .

Bekijk hier een eenvoudig griepmodel.



Figuur 2

Voorbeeld 1

In een bepaalde regio vertrekt elke tien jaar $\frac{1}{5}$ deel van de bevolking van het platteland P naar de stad S en $\frac{1}{20}$ deel van de stad naar het platteland.

Stel hierbij dit dynamisch model op:

- $S(t) = 0,95 \cdot S(t-1) + 0,2 \cdot P(t-1)$
- $P(t) = 0,05 \cdot S(t-1) + 0,8 \cdot P(t-1)$

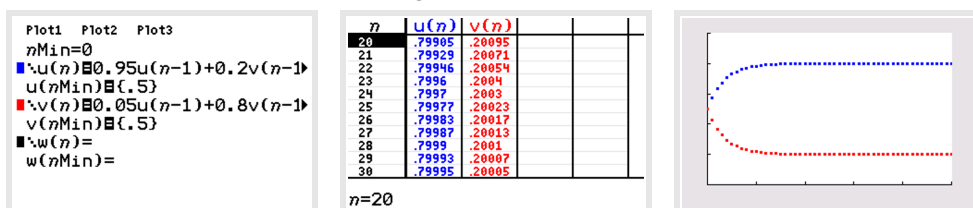
Hierbij is t de tijd in tien jaar.

Er is sprake van een gesloten systeem. Dit kun je zien aan dat zowel de coëfficiënten van $S(t-1)$ als die van $P(t-1)$ samen 1 zijn.

Onderzoek met behulp van een tijdgrafiek van $S(t)$ en $P(t)$ of er een evenwichtstoestand ontstaat voor wat betreft de verdeling van de bevolking van deze regio over stad en platteland. Laat ook zien hoe je die evenwichtstoestand kunt berekenen vanuit de modelvergelijkingen.

Antwoord

Voer de modelformules in op de grafische rekenmachine of in Excel in. Begin bijvoorbeeld met een verdeling van 50% op het platteland en 50% in stedelijke gebieden. Hieruit blijkt dat $S(t)$ en $P(t)$ in dit model naar een evenwicht toegroeien.



Figuur 3

Je kunt de grenswaarden voor $S(t)$ en $P(t)$ ook uit de modelformules afleiden door gebruik te maken dat voor die grenswaarden geldt $S(t) = S(t-1) = S$ en $P(t) = P(t-1) = P$. Dit geeft een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden om op te lossen, waarbij ook nog moet gelden dat $S(t) + P(t) = 1$ voor elke t .

Uit $S = 0,95S + 0,2P$, $P = 0,05S + 0,8P$ en $S + P = 1$ volgt $S = 0,8$ en $P = 0,2$.

Uiteindelijk zal $\frac{4}{5}$ deel van de bevolking in de stad wonen en $\frac{1}{5}$ deel op het platteland.

Opgave 3

Bekijk het verstedelijkingsmodel in **Voorbeeld 1**.

- Waarom moet gelden dat $S(t) + P(t) = 1$ voor elke t ?
- Plot de tijdgrafiek van $S(t)$ en $P(t)$ met verschillende beginwaarden. Welke grenswaarden benaderen ze? Hangen die waarden af van de beginwaarden die worden gekozen?
- Laat zie hoe je deze grenswaarden voor $S(t)$ en $P(t)$ berekent uit de modelformules.
- Hoe zou je dit verstedelijkingsmodel kunnen uitbreiden en wel rekening houden met toestroom van buiten de regio?

Opgave 4

In een stadswijk met 12000 inwoners zijn twee supermarkten: Super en Markt. Sommige mensen uit de wijk hebben een voorkeur voor Super, anderen voor Markt en nog weer anderen wisselen af en toe van supermarkt. In de tabel is van een representatieve steekproef van 1500 mensen uit deze wijk die één keer per week naar de supermarkt gaan, bijgehouden naar welke supermarkt ze zijn geweest.

		week 2	
		Super	Markt
week 1	Super	545	266
	Markt	258	431

Tabel 1

Ga ervan uit dat het gedrag in de loop van de komende weken hetzelfde blijft.

- Bereken hoeveel procent van de mensen in deze wijk die één per week naar de supermarkt gaan, blijft terugkomen bij Super.
- $S(t)$ is het aantal wekelijkse supermarktgangers van deze steekproef naar Super en $M(t)$ het aantal wekelijkse supermarktgangers van deze steekproef naar Markt.
Waarom moet gelden $S(t) + M(t) = 1500$ voor elke t ?
- Stel voor $S(t)$ en $M(t)$ recursieformules op en onderzoek met de grafische rekenmachine of ze naar bepaalde grenswaarden toe groeien.
- Hoe kun je deze grenswaarden vanuit de modelformules berekenen?

Voorbeeld 2

In de economie wordt als typerend model voor vraag een aanbod de zogenaamde 'varkenscyclus' gebruikt. Hierbij gaat het erom dat het aanbod $q_A(t)$ (van varkens op de varkensmarkt) op een bepaald tijdstip t afhangt van de prijs $p(t-1)$ van een periode eerder. De vraag $q_V(t)$ wordt echter bepaald door de prijs van dit moment $p(t)$.

Verdere modelaannames zijn:

- Als de prijs toeneemt, neemt de vraag af.
- Als de prijs toeneemt, neemt het aanbod toe.
- Zowel vragers als aanbieders reageren onmiddellijk op elke prijsverandering.
- Alles wat wordt aangeboden wordt meteen verkocht.

Hierbij passen modelformules zoals: $q_A(t) = p(t-1) - 25$ en $q_V(t) = 400 - 1,5p(t)$.

Reken dit model door met een startprijs $p(0) = 120$ en zoek de prijs waarbij vraag en aanbod elkaar in evenwicht houden.

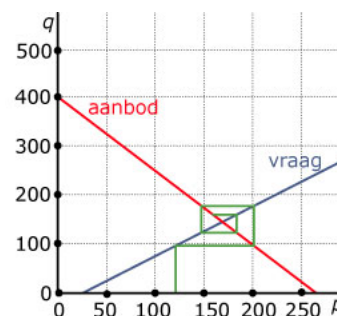
Antwoord

Breng dit model in beeld door de lijnen $q_A = p - 25$ en $q_V = 400 - 1,5p$ in één assenstelsel te tekenen. Start bij $p(0) = 120$, bepaal eerst q_A en bepaal dan bij welke prijs q_V even groot is. Bepaal bij die $p(1)$ weer q_A en herhaal het voorgaande.

Om dit model op de grafische rekenmachine in te voeren, stel je voor $p(t)$ een differentievergelijking op uitgaande van $q_A = q_V$.

Deze wordt: $p(t-1) - 25 = 400 - 1,5p(t)$.

Dit geeft $p(t) = 283\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot p(t-1)$ en hieruit blijkt hoe de rij $p(t)$ convergeert naar een evenwichtsprijs.



Figuur 4

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** tref je een economisch model aan dat de varkenscyclus wordt genoemd. Er zijn twee modelvergelijkingen gegeven.

- Leg uit dat beide modelvergelijkingen voldoen aan de eerste twee aannames.
- Laat met een tijdgrafiek zien dat de rij $p(t)$ convergeert.
- Stel een directe formule op voor $p(t)$ en bereken daarmee de grenswaarde die $p(t)$ nadert. Bekijk de grafiek in het voorbeeld waarin de prijsontwikkeling is aangegeven.
- Waarom is dit niet de webgrafiek van de rij $p(t)$?
- Hoe kun je uit de oorspronkelijke modelformules de grenswaarde van $p(t)$ berekenen?

Opgave 6

Een dynamisch vraag- en aanbodmodel wordt gegeven door $q_A(t) = 2 + p(t-1)$ en $q_V(t) = 16 - \frac{4}{3}p(t)$ met t in maanden. q_A stelt de aangeboden hoeveelheid van een bepaald artikel voor en q_V is de op de handelsmarkt gevraagde hoeveelheid van hetzelfde artikel. Neem $p_0 = 3$.

- Waarom komt in de formule voor de vraag $p(t)$ voor en in die voor het aanbod $p(t-1)$?
- Stel een recursieformule op voor $p(t)$ uitgaande van $q_A = q_V$ en laat met een tijdgrafiek zien dat de rij $p(t)$ convergeert.
- Stel een directe formule op voor $p(t)$ en bereken daarmee de grenswaarde die $p(t)$ nadert.
- Teken een grafiek waarin je de prijsontwikkeling aangeeft met behulp van de grafieken van $q_A = 2 + p$ en $q_V = 16 - \frac{4}{3}p$.

Voorbeeld 3

In veel natuurgebieden is er sprake van een wisselwerking tussen de roofdieren en hun prooi, zoals vossen en konijnen. Modellen die zo'n wisselwerking bestuderen heten 'roofdier-prooi-modellen'. De Italiaanse wiskundige Vito Volterra en de Amerikaanse wiskundige Alfred J. Lotka ontwierpen in 1925-1926 een dynamisch model voor dergelijke wisselwerkingen. Als $P(t)$ het aantal prooidieren en $R(t)$ het aantal roofdieren op tijdstip t is, zien de vergelijkingen er in discrete vorm als volgt uit:

- $P(t) = P(t-1) + (a - b \cdot R(t-1)) \cdot P(t-1)$
- $R(t) = R(t-1) - (c - d \cdot P(t-1)) \cdot R(t-1)$



Figuur 5

Hierin zijn a , b , c en d positieve getallen.

Neem $a = 0,20$, $b = 0,0015$, $c = 0,1$ en $d = 0,0002$. Ga verder uit van $P(0) = 600$ dieren en $R(0) = 100$ dieren. De tijd t is in maanden.

Plot met de grafische rekenmachine een grafiek waarin je het aantal prooidieren uitzet tegen het aantal roofdieren voor deze 120 maanden. Hoe zie je aan deze grafiek dat dit model periodiek is met een zekere stijgingstrend?

Antwoord

Voer in:

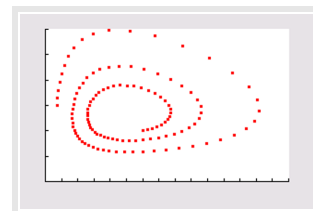
$$u(n) = u(n-1) + (0,2 - 0,0015 \cdot v(n-1)) \cdot u(n-1) \text{ en } u(n \text{ Min}) = \{600\}.$$

$$v(n) = v(n-1) - (0,1 - 0,0002 \cdot u(n-1)) \cdot v(n-1) \text{ en } v(n \text{ Min}) = \{100\}.$$

Venster: $[0,150] \times [0,300]$.

Kies voor de fasegrafiek, zie het [Practicum](#).

De grafiek ziet eruit als een langzaam naar buiten spirallende kromme.



Figuur 6

Opgave 7

Bekijk het roofdier-prooi-model in [Voorbeeld 3](#).

- Waarom komt in de formule voor het aantal roofdieren een minteken voor $(c - d \cdot P(t-1)) \cdot R(t-1)$?
- Voer de recursieformules in op de grafische rekenmachine en plot een tijdgrafiek voor de eerste 120 maanden.
- Na hoeveel maanden heeft het aantal prooidieren voor het eerst een maximale waarde bereikt? Waardoor wordt de daling van het aantal prooidieren daarna veroorzaakt?
- Ga na dat het model periodiek is met een zekere stijgingstrend.

Opgave 8

In een afgesloten gebied leven konijnen en vossen. Voor de groeifactor van het aantal konijnen geldt $g_k = 1,15 - 0,01 \cdot V(t)$ en voor de groeifactor van het aantal vossen geldt $g_v = 0,70 + 0,0002 \cdot K(t)$. Hierin is $K(t)$ het aantal konijnen in jaar t en $V(t)$ het aantal vossen in jaar t . Neem aan dat $V(0) = 20$ en $K(0) = 2500$ dieren.

- Licht toe dat hierbij het roofdier-prooi-model past dat in [Voorbeeld 3](#) is beschreven.
- Welke twee modelformules kun je op grond hiervan opstellen voor het verloop van de aantallen dieren van deze twee soorten?
- Voer de recursieformules in op de grafische rekenmachine en plot een tijdgrafiek voor de eerste 70 maanden.
- Na hoeveel jaar heeft het aantal vossen voor het eerst een maximale waarde bereikt? Wat betekent dit voor het aantal konijnen daarna?
- Is dit model voor beide diersoorten op den duur gunstig?

Verwerken

Opgave 9

In een bepaalde regio vertrekt elke tien jaar $\frac{1}{6}$ deel van de bevolking van het platteland P naar de stad en $\frac{1}{15}$ deel van de stad S naar het platteland.

Ga ervan uit dat er niemand uit de regio vertrekt en er ook niemand van buitenaf in de regio komt wonen.

- Stel een discreet dynamisch model op bij deze situatie.
- Waarom is er hier sprake van een gesloten systeem?
- Toon met behulp van een tijdgrafiek aan dat er sprake is van een evenwichtstoestand.

- d Welk deel van de bevolking zal uiteindelijk in de stad wonen?

Opgave 10

Gegeven zijn de volgende recursieformules:

- $u(t) = u(t-1) + (0,08 - 0,0015 \cdot v(t-1)) \cdot u(t-1)$
- $v(t) = v(t-1) - (0,2 - 0,00048 \cdot u(t-1)) \cdot v(t-1)$

met $u(0) = 600$ en $v(0) = 50$.

Bereken handmatig $u(3)$ en $v(3)$.

Opgave 11

Een bepaalde soort dieren kun je verdelen in jonge dieren en volwassen dieren. De volwassen dieren hebben jaarlijks gemiddeld zo'n 0,4 nakomelingen. Van de jonge dieren wordt jaarlijks ongeveer 25% volwassen. Van de volwassen dieren sterft jaarlijks zo'n 35%. In een bepaald jaar zijn er 40 jonge en 90 volwassen dieren.

- a Stel voor deze diersoort een discreet dynamisch model op.
- b Bereken het aantal jonge dieren tien jaar later.
- c Er is nu geen sprake van een evenwichtstoestand waarin beide generaties naar een bepaalde grenswaarde naderen. Bij welk sterftepercentage van de volwassen dieren is dit wel het geval?

Opgave 12

In een dynamisch vraag-en-aanbodmodel gelden de volgende modelformules: $q_A(t) = 30 + 0,5p(t-1)$ en $q_V(t) = 80 - 2p(t)$. Hierin is t de tijd in maanden en q de hoeveelheid. Er geldt verder $p(0) = 1$ geldeenheid.

- a In dit vraag-en-aanbodmodel is sprake van een vertraging aan de aanbodzijde. Waaraan zie je dit?
- b Laat de prijsontwikkeling op deze markt zien in een figuur waarin q is uitgezet tegen p .
- c Stel een differentievergelijking op voor $p(t)$ uitgaande van $q_A = q_V$ en plot hierbij een tijdgrafiek.
- d Toon aan dat $p(t)$ alternerend convergeert naar een evenwichtsprijs.

Opgave 13

De meeste zeesterren zijn roofdieren, vaak eten ze schelpdieren zoals mosselen. In een bepaald kustgebied hangen de aantallen zeesterren $Z(t)$ en schelpdieren $S(t)$ dan ook van elkaar af. Hoe meer schelpdieren, hoe beter het aantal zeesterren kan groeien, maar die groei van het aantal zeesterren zorgt dan weer voor een afname van het aantal schelpdieren.

Een bioloog heeft in een bassin 600 zeesterren en 4000 schelpdieren uitgezet die door deze zeesterren worden gegeten. Zij wil daarmee onderzoeken hoe het verband tussen $Z(t)$ en $S(t)$ verloopt. Bekend is dat de schelpdieren zich zonder de aanwezigheid van de zeesterren vermeerderen met 26% per jaar in hun normale leefomstandigheden. Verder vermindert het aantal zeesterren met 40% per jaar als ze in het bassin worden geplaatst, want er moeten eerst voldoende prooien zijn om het aantal roofdieren te laten toenemen.

Op grond van deze overwegingen wordt het volgende groeimodel opgesteld en nader onderzocht:

$$S(t) = S(t-1) + (0,26 - p \cdot Z(t-1)) \cdot S(t-1)$$

$$Z(t) = Z(t-1) - (0,40 - q \cdot S(t-1)) \cdot Z(t-1)$$

Na een jaar blijkt het aantal zeesterren te zijn afgenomen tot 432 exemplaren en het aantal schelpdieren te zijn gestegen tot 4704 exemplaren.

- a Welke waarden moeten p en q hebben?
- b Hoeveel zeesterren zijn er tien jaar nadat de bioloog haar dieren heeft uitgezet?
- c Plot met de grafische rekenmachine een tijdgrafiek van dit dynamisch model voor de eerstkomende vijftig jaar. Hoe ontwikkelen beide populaties zich? Welk probleem doet zich voor?
- d Plot met de grafische rekenmachine ook een grafiek waarin je Z uitzet tegen S .

Opgave 14

In een plaats met 100000 inwoners breekt de griep uit. Er geldt:

- $G_t = G_{t-1} - 0,000005Z_{t-1}G_{t-1}$
- $Z_t = Z_{t-1} - 0,25Z_{t-1} + 0,000005Z_{t-1}G_{t-1}$
- $I_t = I_{t-1} + 0,25Z_{t-1}$

Hierin is G_t het aantal gezonde mensen (mensen die geen griep hebben), Z_t het aantal zieken (mensen die griep hebben) en I_t het aantal immuun geworden mensen nadat ze de griep hebben gehad. Neem aan dat $Z_0 = 100$ en $I_0 = 0$ en dat t in dagen is.

- Maak een tabel. Hoeveel dagen na het uitbreken van deze epidemie is het aantal zieken het grootst?
- Hoeveel mensen zijn er op het moment dat het aantal zieken het grootst is weer beter geworden van deze griep?
- Hoe kun je uit deze formules aflezen hoeveel dagen iemand gemiddeld van deze griep ziek is?
Het getal 0,000005 ontstaat door de kans dat iemand die besmet is ook daadwerkelijk ziek wordt te vermenigvuldigen met het percentage gezonde mensen dat dagelijks in contact komt met een zieke en daardoor besmet raakt.
- Bij deze variant van de griep is de kans dat iemand die is besmet ook ziek wordt 0,00001. Hoeveel procent van de gezonde mensen raakt dan gemiddeld per dag besmet en wat gebeurt er met het maximale aantal zieken op een dag als dit percentage groter wordt?

Toepassen

Opgave 15: Macro-economisch model

Economen gebruiken een grote hoeveelheid variabelen om de economie van een bepaald land te beschrijven, zoals:

- de effectieve vraag EV
- de particuliere investeringen I
- de particuliere consumptie C
- het nationaal inkomen Y
- de belastinginkomsten B
- de overheidsuitgaven O

Uiteraard kun je nog meer variabelen invoeren. Tussen al deze variabelen bestaat een verband dat wordt beschreven in een zogenaamd macro-economisch model.

De effectieve vraag is bijvoorbeeld vaak gelijk aan de som van de particuliere consumptie, de particuliere investeringen en de overheidsuitgaven: $EV = C + I + O$.

Bekijk als voorbeeld een macro-economisch model waarin de overheid geen rol speelt:

- $EV_t = C_t + I_t$
- $C_t = 0,6 \cdot Y_{t-1} - 9$
- $I_t = 29$
- $Y_t = EV_t$

Bij de variabelen EV , C , I en Y gaat het om miljarden euro. De tijd t is in jaar.

- Waarom zie je dat de particuliere consumptie afhangt van het nationaal inkomen van het voorgaande jaar?
- Laat zien dat het nationaal inkomen in dit model naar een bepaalde grenswaarde toegroeit door een bijpassende directe formule op te stellen.
Naar welke waarde groeit het nationaal inkomen?

Opgave 16: Vraag- en aanbodmodel voor kaas

Op een zeker moment t bedraagt de prijs van een bepaalde soort kaas € 7,00 per kilo. In periode $t + 1$ wordt dan zo'n 750000 kg van die kaas aangeboden. Daardoor daalt de prijs in die periode naar € 4,50 per kilo. De aangeboden hoeveelheid loopt daarom in de volgende periode $t + 2$ weer terug naar 375000 kg. Hierdoor stijgt de prijs in deze periode naar € 6,50.

- Stel hierbij een dynamisch vraag- en aanbodmodel op.
- Bereken de evenwichtsprijs die ontstaat door een directe formule op te stellen voor de prijs $p(t)$.
- Komt deze prijs overeen met het snijpunt van de vraag- en de aanbodlijn die bij dit model past?

Testen

Opgave 17

In een onderzoek onder 15000 huishoudens is gebleken dat 32% van deze huishoudens die in Nederland op vakantie gaan een jaar later naar het buitenland op vakantie gaan, de rest blijft ook een jaar later in Nederland. Echter van de huishoudens die dit jaar in het buitenland vakantie vieren, blijft jaarlijks 85% een jaar later ook naar het buitenland gaan, alleen de overige 15% gaat een jaar later in Nederland op vakantie.

- Stel hierbij een dynamisch model op, noem het aantal huishoudens dat in Nederland op vakantie gaat $N(t)$ en de buitenlandgangers $B(t)$. Neem t in jaren.
Dit jaar gingen er van deze groep 9000 huishoudens binnen Nederland op vakantie, de rest ging naar het buitenland.
- Hoeveel waren dat er 10 jaar later?
- Stel bij dit rekenmodel een directe formule op voor $N(t)$. Laat daarmee zien dat het aantal huishoudens dat in Nederland vakantie blijft vieren convergeert naar een bepaalde grenswaarde.

Opgave 18

Een roofdier-prooi-model wordt beschreven door de formules:

$$P_t = P_{t-1} + (0,38 - a \cdot R_{t-1}) \cdot P_{t-1}$$

$$R_t = R_{t-1} - (0,10 - b \cdot P_{t-1}) \cdot R_{t-1}$$

Op $t = 0$ is het aantal prooidieren $P_0 = 600$ en het aantal roofdieren $R_0 = 200$. Een maand later op $t = 1$ zijn er $P_1 = 570$ prooidieren en $R_1 = 204$ roofdieren.

- Laat zien dat dit betekent dat $a = 0,00215$ en $b = 0,0002$.
- Voer de bijbehorende recursieformules in op de grafische rekenmachine en maak een tijdgrafiek voor de eerste 100 maanden.
- Plot voor de eerste 100 maanden met de grafische rekenmachine een grafiek waarin je het aantal roofdieren uitzet tegen het aantal prooidieren.
- Als $P_t = P_{t-1} = P$ en $R_t = R_{t-1} = R$, dan is het aantal prooidieren en het aantal roofdieren in stabiel evenwicht. Bereken de waarden P en R . Welke betekenis hebben deze waarden?
- Hoeveel roofdieren zijn er wanneer het aantal prooidieren voor het eerst na de start van deze tellingen een maximum bereikt?

Practicum

Met de volgende practica leer je enkele technieken op de GR die bij het **werken met rijen** onontbeerlijk zijn. Nu gaat het vooral om de vierde paragraaf van zo'n practicum.

- [Rijen met de TI84](#)
- [Rijen met de TIInspire](#)
- [Rijen met de Casio fx-CG50](#)
- [Rijen met de HP prime](#)
- [Rijen met de NumWorks](#)



© 2025

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
