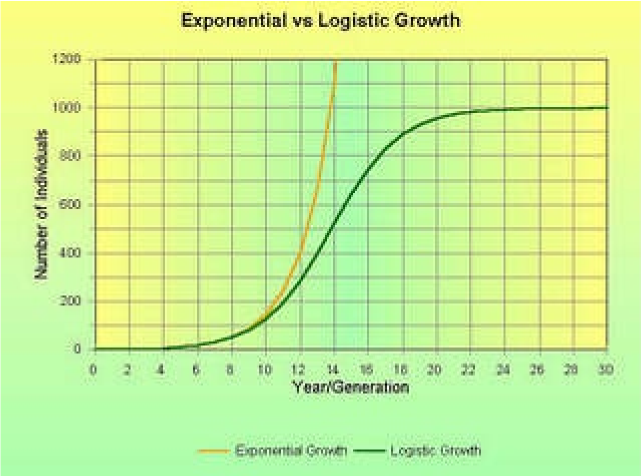
2.3 Differentievergelijkingen

Inleiding

De discrete dynamische modellen die je tot nu toe bent tegengekomen hadden recursieformules van de vorm $u(t) = a \cdot u(t-1) + b$, lineaire recursieformules dus. Je spreek dan wel van lineaire differentievergelijkingen. Maar er bestaan ook kwadratische differentievergelijkingen en die hebben een belangrijke toepassing, namelijk ze beschrijven een zeer specifiek groeimodel: de logistische groei.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- werken met lineaire en vooral kwadratische differentievergelijkingen;
- het begrip logistische groei.

Voorkennis

- werken met formules van rijen, directe formules en recursieformules, ook met de grafische rekenmachine;
- de somformules en de verschilformules voor rekenkundige en meetkundige rijen;
- werken met tijdgrafieken en webgrafieken, dekpunten berekenen.

Verkennen

Opgave V1

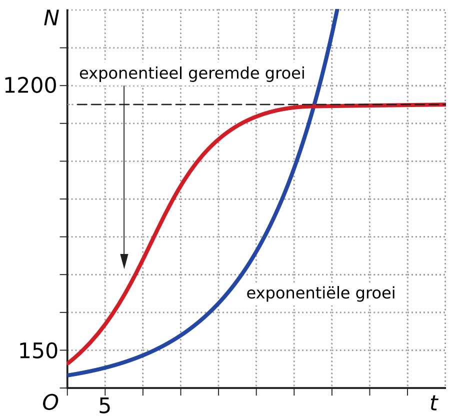
Je ziet in de **Inleiding** twee grafieken die te maken hebben met bevolkingsgroei.

a Welke van beide grafieken zou de tijdgrafiek kunnen zijn bij een dynamisch model met een recursieformule van de vorm $N(t) = a \cdot N(t-1)$? Licht je antwoord toe.

b Is a dan groter of kleiner dan 1?

Uitleg

Bekijk de twee grafieken die de mogelijke groei van een populatie beschrijven.



Figuur 2

- Bij een exponentiële groei (of verval) past een dynamisch model met een recursieformule zoals $N(t) = 1{,}2 \cdot N(t-1)$ met bijvoorbeeld $N(0) = 2000$.
  Deze recursieformule kun je ook noteren als:
  $N(t) = N(t-1) + 0{,}2 \cdot N(t-1)$
  Bij elke volgende stap komt er 20% bij, het getal 0,2 is de (vaste) groeivoet van dit proces.
  De recursieformule heeft de vorm van een lineaire differentievergelijking. Omdat er alleen een verband is tussen $N(t)$ en zijn directe voorganger $N(t-1)$ is dit een lineaire differentievergelijking van de eerste orde.
  Er is sprake van convergentie als $0 < a < 1$ en van alternerende convergentie als $-1 < a < 0$.

- Bij exponentieel geremde groei (of verval), ook wel logistische groei genoemd, is de groei steeds meer geremd naarmate een bepaalde maximale waarde M wordt bereikt. De groeivoet is dan geen constante, maar hangt af van $N(t-1)$. De meest eenvoudige aanname is een lineair verband tussen deze groeivoet en $N(t)$. Omdat de groei steeds sterker moet worden afgeremd als M wordt benaderd, krijgt de groeivoet de vorm $0{,}2 \cdot \left(1 - \frac{N(t-1)}{M}\right)$. Dit geeft een recursieformule van de vorm:

  $N(t) = N(t-1) + 0{,}2 \cdot \left(1 - \frac{N(t-1)}{M}\right) \cdot N(t-1)$

  Er is sprake van een kwadratische differentievergelijking van de eerste orde.

Het oplossen van een differentievergelijking is het vinden van de bijbehorende directe formule.
De lineaire differentievergelijking kan met de somformule van een meetkundige rij worden opgelost.

Opgave 1

Gebruik de gegevens uit de **Uitleg**. Neem eerst de recursieformule
$N(t) = 1{,}2 \cdot N(t-1)$ met $N(0) = 2000$.

a Laat zien dat je hieruit de directe formule $N(t) = 2000 \cdot 1{,}2^t$ kunt afleiden.

b Plot de bijbehorende webgrafiek en laat zien dat de rij divergeert.

Gebruik de recursieformule $N(t) = N(t-1) + 0{,}2 \cdot \left(1 - \frac{N(t-1)}{M}\right) \cdot N(t-1)$. Neem $M = 4000$ en $N(0) = 2000$.

c Plot de bijbehorende webgrafiek en laat zien dat deze rij convergeert naar $M = 4000$.

d De groeivoet 0,2 wordt vermenigvuldigd met een remfactor $\left(1 - \frac{N(t-1)}{M}\right)$. Laat zien dat dit een getal tussen 0 en 1 is dat steeds kleiner wordt naarmate $N(t-1)$ dichter bij M komt.

e Waarom is hier sprake van een kwadratische differentievergelijking?

f Laat zien dat uit de differentievergelijking volgt dat M de evenwichtswaarde is.

Opgave 2

Onderzoek bij de differentievergelijkingen of de bijbehorende rijen convergeren of divergeren en bereken de eventuele grenswaarden.

a $N(t) = 0{,}84 \cdot N(t-1) + 200$ met $N(0) = 0$

b $N(t) = 150 + 1{,}4 \cdot N(t-1)$ met $N(0) = 100$

c $N(t) = 0{,}5N(t-1)(6 - N(t-1))$ met $N(0) = 1$

Opgave 3

Een lineaire differentievergelijking van de eerste orde heeft als algemene vorm:
$N(t) = a \cdot N(t-1) + b$ met $N(0) = d$

a Laat zien dat bij een convergente lineaire differentievergelijking van de eerste orde de grenswaarde $N = \frac{b}{1-a}$ is.

b Laat zien dat bij een convergente lineaire differentievergelijking van de eerste orde de directe formule $N(t) = \left(d - \frac{b}{1-a}\right) \cdot a^t + \frac{b}{1-a}$ hoort.

c Waarom is deze rij altijd convergent als $0 < a < 1$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Er zijn enkele karakteristieke discrete dynamische modellen te onderscheiden.

- Bij exponentiële groei (of verval) past een recursieformule van de vorm:
  $N(t) = N(t-1) + c \cdot N(t-1) + b$, ofwel $N(t) = a \cdot N(t-1) + b$ met $c = a - 1$
  Hierin is c de groeivoet en $c = a - 1$ de groeifactor.
  Je kunt er een directe formule bij maken van de vorm:
  $N(t) = \left(N(0) - \frac{b}{1-a}\right) \cdot a^t + \frac{b}{1-a}$
  De recursieformule heeft de vorm van een **lineaire differentievergelijking van de eerste orde**.
  Er is sprake van convergentie als $0 < a < 1$ en van alternerende convergentie als $-1 < a < 0$.
- Bij **geremde exponentiële groei** (ook wel **logistische groei** genoemd) past een recursieformule van de vorm:
  $N(t) = N(t-1) + c \cdot \left(1 - \frac{N(t-1)}{M}\right) \cdot N(t-1)$
  Hierin is c de groeivoet en M de grenswaarde die $N(t)$ steeds dichter benadert als $t \to \infty$ en c een constante is.
  Nu is er sprake van een **kwadratische differentievergelijking van de eerste orde**.

Bij beide soorten differentievergelijkingen kun je zowel een tijdgrafiek als een webgrafiek maken. Of en hoe de rij convergeert, kun je aan deze grafieken zien.

Het oplossen van een differentievergelijking is het vinden van de bijbehorende directe formule.
De lineaire differentievergelijking kan met de somformule van een meetkundige rij worden opgelost.

Voorbeeld 1

Je verwarmt een bepaalde vloeistof tot 100 °C. Als je deze vloeistof in een beker overgiet, begint hij af te koelen. Voor de temperatuur $T(t)$ met T in °C en t in minuten geldt $T(t) = 0{,}9 \cdot T(t-1) + 2$.
Laat zien dat deze differentievergelijking een exponentieel vervalproces beschrijft door de bijbehorende directe formule op te stellen. Hoe groot is de groeifactor en hoe groot is de groeivoet?

Antwoord

Bij deze lineaire differentievergelijking van de eerste orde hoort de directe formule:

$T(t) = \left(100 - \frac{2}{1-0{,}9}\right) \cdot 0{,}9^t + \frac{2}{1-0{,}9} = 80 \cdot 0{,}9^t + 20$

Dit is een exponentiële functie met een groeifactor van 0,9.
De groeivoet c vind je uit $c = 0{,}9 - 1$. De groeivoet is -0,1.

Opgave 4

Een cultuur bacteriën groeit volgens de differentievergelijking $N(t) = N(t-1) + 0{,}05 \cdot N(t-1)$, waarin $N(t)$ het aantal bacteriën na t dagen is. Op $t = 0$ zijn er 50 bacteriën.

a Plot bij deze bacteriegroei een tijdgrafiek.

b Toon aan dat de groei van deze bacteriën exponentieel verloopt door een bijpassende directe formule op te stellen.

c Leg uit waarom deze rij wel divergent moet zijn.

Opgave 5

Een tuinder oogst jaarlijks 40% van zijn thuja's en plant daarna weer 500 jonge thuja's. Dit jaar heeft hij in totaal ongeveer 1600 thuja's staan.

a Stel bij deze situatie een recursieformule op. Is hier sprake van een lineaire differentievergelijking van de eerste orde?

b Hoeveel is de groeivoet? En de groeifactor?

c Toon de convergentie van deze rij aan door een directe formule op te stellen en de daarbij passende grenswaarde te berekenen.

Voorbeeld 2

In een afgesloten gebied wordt van een bepaalde soort snuitkever een populatie van 20 uitgezet. Omdat hun leefgebied is begrensd, zal er sprake zijn van geremde exponentiële groei. Een onderzoeker heeft voor het aantal kevers $K(t)$ in de loop van de jaren de kwadratische differentievergelijking $K(t) = 2{,}5 \cdot \left(1 - \frac{K(t-1)}{1000}\right) \cdot K(t-1)$ opgesteld.

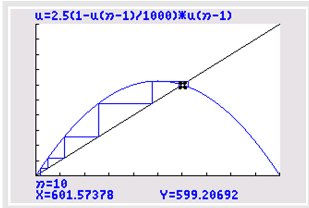
Plot een bijbehorende webgrafiek en laat zo zien dat het aantal kevers convergeert. Laat ook zien dat hier sprake is van een groeivoet die kleiner wordt naarmate de populatie groeit.

Antwoord

Uit de webgrafiek blijkt de convergentie. K nadert de waarde 600.

Noteer de formule als:

$$\begin{aligned} K(t) &= 2{,}5 \cdot \left(1 - \frac{K(t-1)}{1000}\right) \cdot K(t-1) \\ &= 2{,}5K(t-1) - \frac{(K(t-1))^2}{400} \\ &= K(t-1) + 1{,}5K(t-1) - \frac{(K(t-1))^2}{400} \\ &= K(t-1) + 1{,}5 \cdot \left(1 - \frac{K(t-1)}{600}\right) \cdot K(t-1) \end{aligned}$$



Figuur 3

De groeivoet is $1{,}5 \cdot \left(1 - \frac{K(t-1)}{600}\right)$ en als $K(t-1) \to 600$, dan $1 - \frac{K(t-1)}{600} \to 0$.

Opgave 6

Bekijk de kwadratische differentievergelijking in **Voorbeeld 2**.

a Hoe lees je uit de herleide recursieve formule de grenswaarde van de geremde groei af?

b In de webgrafiek wordt behalve de lijn $y = x$ ook een parabool getekend. Welke formule hoort er bij die parabool?

c Bereken de dekpunten van de gegeven rij. Zijn ze in overeenstemming met de grenswaarde?

d Is het aantal snuitkevers dat aan het begin wordt uitgezet van belang voor de grenswaarde die wordt bereikt?

Opgave 7

De groei van een aantal bacteriën $N(t)$ wordt bij benadering beschreven door de kwadratische differentievergelijking $N(t) = k \cdot N(t-1) \cdot (400 - N(t-1))$, waarin t het aantal dagen na $t = 0$ is en $N(0) = 50$.
Neem eerst $k = 0{,}005$.

a Plot bij dit groeimodel een webgrafiek en een tijdgrafiek. Naar welke waarde convergeert het aantal bacteriën?

b Herleid de recursieformule tot een vorm waarin je de veranderende groeivoet kunt aflezen. Welke waarde heeft de groeivoet?

c Hoe lees je uit de herleide recursieformule de grenswaarde van de geremde groei af?

d In de webgrafiek wordt behalve de lijn $y = x$ ook een parabool getekend. Welke formule hoort er bij die parabool?

e Bereken de dekpunten van de gegeven rij. Zijn ze in overeenstemming met de grenswaarde?

f Wat is er aan de hand als je met 200 bacteriën begint?

Verwerken

Opgave 8

Bereken de dekpunten bij de volgende lineaire differentievergelijkingen van de eerste orde. Onderzoek ook of er van convergentie sprake is.

a $X_n = 0{,}5X_{n-1} + 2$ met $X_0 = 6$

b $K(t+1) = 1{,}08K(t)$ met $K(0) = 2000$

c $N_t = 5 - 0{,}6N_{t-1}$ met $N_0 = 0$

Opgave 9

Gegeven is de differentievergelijking $N(t+1) = 0{,}8 \cdot N(t) + 100$.

a Laat zien dat het dekpunt van de bijbehorende rij niet afhangt van $N(0)$.

b Plot de tijdgrafieken bij $N(0) = 100$, $N(0) = 500$ en $N(0) = 900$.

c Naar welke grenswaarde convergeren al deze rijen?

d Stel de bij $N(0) = 100$, $N(0) = 500$ en $N(0) = 900$ behorende directe formules op en toon ook daarmee de convergentie aan.

Opgave 10

Gegeven is de kwadratische differentievergelijking

$K_t = K_{t-1} + 0{,}25 \cdot K_{t-1} \cdot \left(1 - \frac{K_{t-1}}{100}\right)$

met $K_0 = 20$.

a Laat zien dat de dekpunten van de bijbehorende rij op de parabool met vergelijking $y = 1{,}25x - 0{,}0025 \cdot x^2$ liggen.

b Bereken de twee dekpunten van de rij.

c Bepaal met behulp van een webgrafiek of deze rij convergeert.

Opgave 11

Gegeven is de kwadratische differentievergelijking
$N(t) = 5 \cdot N(t-1) \cdot (1 - N(t-1)) + 1$.

Er zijn twee startwaarden waarbij de rij $N(t)$ constant is. Bereken die waarden.

Opgave 12

Voor het aantal herten in een bosrijk gebied geldt dat er sprake is van logistische groei. Onderzoekers hebben de volgende recursieformule opgesteld:

$A_t = 1{,}8 \cdot A_{t-1} - a \cdot A_{t-1}^2$

Op 1 juli 2015 waren er 4000 herten en een jaar later 4800.

a Toon aan dat $a = 0{,}00015$.

b Herleid de recursieformule zo, dat je de groeivoet kunt aflezen.

c Hoeveel herten zijn er in dit gebied op den duur?

Opgave 13

Gegeven is de kwadratische differentievergelijking $K_t = a \cdot K_{t-1} \cdot (1 - K_{t-1})$ met $K_0 = 0{,}2$.

a Voor welke waarde van a is de rij K_t constant?

b Voor welke exacte waarde(n) van a bestaat de rij K_t uit maar twee verschillende getallen?

Toepassen

Opgave 14: Brandnetels

Brandnetels kunnen zich in korte tijd zeer snel verspreiden. Een onderzoeker vraagt zich af hoe het groeiproces verloopt en plant daartoe op een proefveldje 25 van die planten. Na een week telt zij 15 nieuwe brandnetels en daarom vermoedt ze dat het aantal brandnetels exponentieel groeit.

a Schat de groeifactor per week g van die brandnetels.

b Voorspel het aantal brandnetels in de komende vijf weken uitgaande van het exponentiële groeimodel.

De brandnetels blijken niet te groeien volgens dit groeimodel. De reden is dat het proefveldje een beperkte oppervlakte heeft. Aan het eind van de vijftiende week lijken er evenveel brandnetels te zijn als aan het eind van de zestiende week, namelijk 225. De onderzoeker gaat daarom uit van een logistisch groeimodel met grenswaarde 225.

c Stel een geschikt logistisch groeimodel op.

d Doe nu een nieuwe voorspelling van de aantallen brandnetels in de loop van de eerste vijf weken na het planten.

Testen

Opgave 15

Iemand heeft een miljoen gewonnen in een loterij. Hij wil ervan gaan leven en zet het op een bank tegen een rente van 3% per jaar. Maandelijks haalt hij € 1500,00 van de bank voor zijn levensonderhoud.

a Stel hierbij een lineaire differentievergelijking op.

b Teken een bijpassende webgrafiek en ga na of de saldi convergeren naar een bepaalde waarde. Bereken dan die waarde.

c Stel een directe formule op voor de rij van de saldi. Ga met behulp van die formule ook na of het saldo uiteindelijk convergeert.

d Hoeveel kan deze gelukkige winnaar maandelijks van de bank halen zonder dat zijn geld ooit op raakt?

Opgave 16

Er wordt een nieuw maandblad opgericht. Het aantal abonnees groeit in het begin sterk, van 3000 van het eerste blad tot 5670 van het tweede blad. De uitgever van het blad hoopt dat deze stijging van zo'n 90% per maand nog even door zal gaan. Noem het aantal abonnees per maand $A(t)$, het aantal abonnees van de eerste oplage is $A(0)$.

a Stel voor het exponentiële groeimodel een recursieformule op.

b De rij $A(t)$ is divergent. Laat dan zien door een directe formule voor deze rij op te stellen

Na verloop van tijd wordt de groei van het aantal abonnees kleiner. Er geldt in feite dat $A(t) = 1{,}95 \cdot A(t-1) - 0{,}00002 \cdot (A(t-1))^2$ met $A(0) = 3000$.

c Maak een webgrafiek bij dit model en bereken de dekpunten van $A(t)$.

d Hoeveel abonnees zal dit tijdschrift op den duur krijgen als de groei zo door gaat?