2.1 Dynamische modellen

Inleiding

Een bijzonder type wiskundige modellen dat veel voorkomt is het dynamische model. Daarbij worden rekenmodellen opgesteld van de veranderingen van de situatie met de tijd. En daarmee wordt dan gerekend, of (als de situatie niet te complex is) er wordt geprobeerd één of meer formules af te leiden waarmee de toestand op elk tijdstip kan worden bepaald. Een voorbeeld van een situatie waarin een dynamisch model kan worden opgesteld is de ontwikkeling van het aantal bomen op een perceel dat voor de houtproductie is bestemd.

Je leert in dit onderwerp

- het begrip dynamisch model en modelformules (recursieformules) opstellen en doorrekenen;
- diverse situaties bekijken waarin een discreet dynamisch model een goede beschrijving is.

Voorkennis

- werken met formules van rijen, directe formules en recursieformules, ook met de grafische rekenmachine;
- de somformules en de verschilformules voor rekenkundige en meetkundige rijen.

Verkennen

Opgave V1

Een bosbouwbedrijf verkoopt het hout van bomen die het zelf aanplant. Het bedrijf beschikt onder andere over een perceel waar 5000 bomen zijn geplant die inmiddels groot genoeg zijn om te worden gekapt. Om dit jaarlijks te kunnen blijven doen worden op de plek van de gekapte bomen ook weer nieuwe bomen aangeplant. Maar die hebben een aantal jaren de tijd nodig om kaprijp te worden, dus het bosbouwbedrijf kapt jaarlijks niet alle bomen, maar 15% ervan en plant er dan weer 1000 bij. Zo kan men op dit perceel jaar in jaar uit bomen kappen. Omdat er meer wordt aangeplant dan gekapt, zal het aantal bomen op dit perceel gaan toenemen, maar daar is ruimte voor.

a Onderzoek hoe het aantal bomen in de loop van de jaren gaat toenemen, bijvoorbeeld door een tabel te maken.

b Zal het aantal bomen op dit perceel de 5000 gaan overstijgen?

Uitleg

Bosbouwbedrijf van Aken verkoopt het hout van bomen die het zelf aanplant. Het bedrijf beschikt over een perceel waar 5000 bomen zijn geplant. Deze bomen zijn inmiddels groot genoeg om te kappen. Om dit jaarlijks te kunnen blijven doen worden op de plek van de gekapte bomen ook weer nieuwe bomen aangeplant. Het bosbouwbedrijf kapt jaarlijks 15% van de bomen en plant er 1000 bij. Er worden meer bomen aangeplant dan gekapt. Het aantal bomen op dit perceel zal daardoor toenemen.

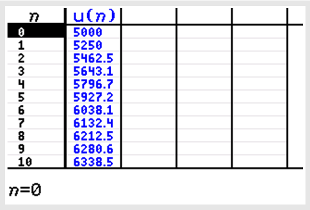
Figuur 1

Er wordt jaarlijks gekapt en weer aangeplant, neem je daarom de tijd t in jaar. Het aantal bomen B op het perceel hangt van t af, neem $B(0) = 5000$.

Leid uit de tekst af dat:
$B(t+1) = B(t) - 0{,}15 \cdot B(t) + 1000 = 0{,}85B(t) + 1000$

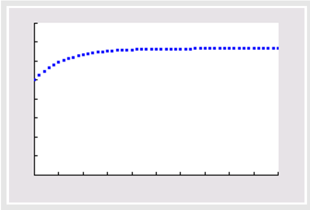
Dit is een recursieformule van een rij getallen. Omdat B afhangt van de tijd spreek je van een dynamisch model. En omdat de tijd in stappen van $\Delta t = 1$ wordt doorlopen, is dit een discreet dynamisch model.

Met de grafische rekenmachine kun je er een tabel en een grafiek bij maken. Bekijk het **Practicum**.



n	$u(n)$
0	5000
1	5250
2	5462.5
3	5643.1
4	5796.7
5	5927.2
6	6038.1
7	6132.4
8	6212.5
9	6280.6
10	6338.5

n=0



Figuur 2

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je een voorbeeld van een discreet dynamisch model.

a Licht toe hoe de recursieformule voor $B(t)$ uit de probleemstelling is te halen.

b Waarom heet zo'n model ‘dynamisch’?

c Waarom heet zo'n model ‘discreet’?

Opgave 2

Bekijk nog eens het bosbouwmodel in de **Uitleg**.

a Hoeveel bedraagt de grenswaarde van het aantal bomen vanuit de recursieformule berekend?

b Het bosbouwbedrijf van Aken besluit jaarlijks minder bomen te gaan aanplanten. Wat gebeurt er met de grenswaarde als er jaarlijks maar 500 bomen worden aangeplant?

c Hoeveel bomen moeten er jaarlijks worden aangeplant om een grenswaarde van ongeveer 6000 bomen te bereiken?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **discreet dynamisch model** is een rekenmodel voor een praktische situatie die met vaste tijdstappen verandert. Zo'n model bestaat uit:

- variabelen die met de tijd veranderen;
- modelformules van de vorm
  $u(t+1) = u(t) + \Delta u(t)$ met gegeven $u(0)$ en $t = 0,1,2,3,...$
  of
  $u(t) = u(t-1) + \Delta u(t)$ met gegeven $u(0)$ en $t = 1,2,3,4,...$
  waarin u een variabele en t de tijd voorstelt;
- parameters, constanten die je nog kunt aanpassen.

De modelformules zijn vaak recursieformules (ook wel recursieve formules genoemd, het proces heet ook wel iteratie). Daarmee kan de volgende term alleen berekend worden als de vorige term bekend is. Daarom moet er altijd een beginwaarde bij de formule gegeven zijn. De nummering kan starten bij 0 of bij 1. Dit wordt altijd aangegeven.

De parameters vind je terug in de uitdrukking die $\Delta u(t)$ beschrijft. Ze zijn vaak gebaseerd op bepaalde modelaannames, bijvoorbeeld een schatting van het percentage dat verandert. Bij ingewikkelder modellen kun je ook de tijdstap nog aanpassen. Die is dan niet altijd 1, maar wordt aangegeven met Δt of $\mathrm{d}t$.

Voorbeeld 1

In een zwembad is op zeker moment de chloorconcentratie 1 liter/m^3. Dat is te hoog en dus wordt het water ververst. Elk uur wordt 60 m^3 water vervangen door 60 m^3 schoon water. Er zit in totaal 1000 m^3 water in het zwembad.
Bereken na hoeveel uur de chloorconcentratie is gehalveerd.

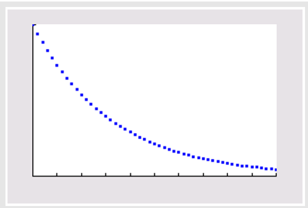
Antwoord

Noem de chloorconcentratie $C(t)$ waarin t de tijd in uren is en C in L/m^3. Ga ervan uit dat het schone water zich onmiddellijk met al het badwater vermengt, zodat $C(t)$ in het hele zwembad steeds op een bepaald tijdstip hetzelfde is.
Elk uur wordt de chloorconcentratie met $\Delta C(t) = 0{,}060 \cdot C(t)$ verminderd.

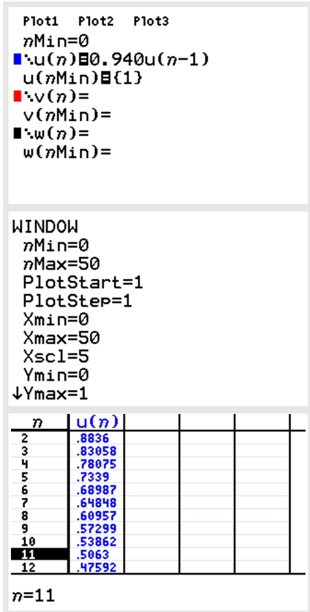
Dan geldt de modelvergelijking: $C(t+1) = C(t) - 0{,}060 \cdot C(t) = 0{,}940 \cdot C(t)$

De chloorconcentratie op $t = 0$ (als het verversen van het water begint) is $C(0)$.

Voer deze formule in op de grafische rekenmachine. Uit de grafiek of de tabel blijkt dat de halveringstijd ongeveer 11,5 uur is.



Figuur 4



Figuur 3

Zie voor een uitwerking in Excel het bestand **Modelzwembad**.

Opgave 3

Voorbeeld 1 beschrijft hoe het water van een groot zwembad wordt ververst omdat de chloorconcentratie te hoog is. Hier dient een discreet dynamisch model als benadering van het voortdurende versversingsproces (uitstromen van vuil water en instromen van schoon water).

a Waarom is dit in werkelijkheid geen discreet model?

b Stel dat je om het uur naar het verversingsproces kijkt. Leg uit waarom er het eerste uur 60 liter chloor verdwijnt. Verklaar waarom er het tweede uur 56,4 liter chloor verdwijnt.

c Leg uit waarom $\Delta C(t) = -0{,}060 \cdot C(t)$.

d Welke directe formule hoort bij $C(t)$?

e Je kunt op het Excel-werkblad de chloorconcentratie aanpassen.
Wat gebeurt er als de concentratie twee keer zo groot wordt?

Opgave 4

Als licht door een bepaald materiaal zoals een glasplaat gaat, neemt de intensiteit ervan voortdurend af. Die afname is recht evenredig met de dikte van de gepasseerde laag materiaal. Noem de intensiteit van het licht $I(d)$ waarin d de dikte van de gepasseerde laag materiaal in meter is. Bekijk eerst wat er gebeurt in stappen van een meter.

a Laat zien dat dan geldt: $I(d+1) = I(d) - k \cdot I(d)$, waarin k een evenredigheidsconstante is die afhangt van het materiaal.

b De tijd speelt hier schijnbaar geen rol, toch is dit een dynamisch model. Licht dit toe.

c Neem aan dat $k = 0{,}2$ en $I(0) = 100$. Bereken $I(1)$, $I(2)$, $I(3)$, $I(4)$ en $I(5)$.

d Bereken vanaf welke dikte niet meer dan 1% van het licht doordringt.

Voorbeeld 2

Je verwarmt water tot 100 °C. Als je het in een kopje overgiet begint het af te koelen. Volgens de warmtewet van Newton is de temperatuurverandering recht evenredig met het temperatuurverschil met de omgeving. Stel dat het kopje in een kamer staat met een temperatuur van 20 °C, hoe kun je dit afkoelingsproces dan beschrijven?

Figuur 5

Antwoord

Noem de temperatuur $T(t)$ met T in °C en t in minuten.
Het temperatuurverschil met de omgeving is dan $T(t) - 20$.
Volgens de warmtewet van Newton is dan: $T(t+1) = T(t) - c \cdot (T(t) - 20)$.
c is een parameter van het afkoelingsproces die je alleen door meten in een echt experiment kunt bepalen. Eigenlijk is ook de begintemperatuur een parameter, want waarschijnlijk is het water al bij overgieten niet meer precies 100 °C.

In **ModelAfkoelen.xls** kun je nagaan hoe het afkoelen verloopt als c is gemeten.

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** wordt het afkoelingsproces van kokend water beschreven.

a Bekijk niet meteen het antwoord. Probeer eerst zelf te beschrijven hoe het afkoelingsproces verloopt. Misschien ben je in de gelegenheid om metingen te verrichten aan het afkoelen van kokend water.

b Met welke starttemperatuur heb je te maken? Hoeveel bedraagt de ‘eindtemperatuur’?

c Bekijk het antwoord en het Excel-werkblad. Ga er van uit dat je stapgrootte 1 minuut is. Leid de bijpassende modelformule $T(t+1) = T(t) + c \cdot (T(t) - 20)$ af. Verklaar daarbij ook de modelformules in je Excel-werkblad.

d Als je metingen hebt kunnen verrichten, dan heb je een tabel waar een grafiek van T bij past. Probeer door aanpassen van c die grafiek met je Excel-werkblad te benaderen.

e Waarvan zal c afhangen?

f Je kunt (afhankelijk van je metingen) de stapgrootte aanpassen naar bijvoorbeeld 2 minuten. Dan moet wel de factor c kleiner worden genomen. Experimenteer daar even mee. Welke waarden voor c passen bij deze stapgrootte?

Voorbeeld 3

Als je geld leent dan moet je naast een maandelijkse aflossing ook rente betalen over je schuld. Neem aan dat je € 10000,00 leent en dat je deze schuld in twintig maanden wilt afbetalen. Per maand betaal je dan € 500,00. Over de schuld die je aan het begin van elke maand hebt, moet je 0,6% rente betalen. Je betaalt zowel je aflossing als de rente aan het eind van elke maand.
Bereken hoeveel deze lening in totaal kost.

Antwoord

In deze situatie kun je een discreet dynamisch model maken bestaande uit twee modelformules.

$B(t)$ is de belasting aan het eind van maand t en $S(t)$ is de schuld aan het begin van de maand t. Neem t in maanden.

- $B(0) = 0$ en $S(0) = 10000$
- $B(1) = 0{,}006 \cdot 10000 + 500 = 560$ en $S(1) = 10000 - 500 = 9500$
- $B(2) = 0{,}006 \cdot 9500 + 500 = 557$ en $S(2) = 9500 - 500 = 9000$
- $B(3) = 0{,}006 \cdot 9000 + 500 = 554$ en $S(3) = 9000 - 500 = 8500$

Dit geeft: $S(t) = S(t-1) - 500$ en $B(t) = 0{,}006 \cdot S(t-1) + 500$

Bepaal met de grafische rekenmachine het totale bedrag:

$\sum_{t=1}^{20} B(t) = 10630$ euro.

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** wordt een wijze van geld lenen en terugbetalen besproken. Er zijn twee modelformules.

a Voer beide recursieformules op de grafische rekenmachine in. Bekijk de tabellen van beide formules.

b Waarom kun je in dit model niet werken met een andere stapgrootte dan 1 maand?

c Stel voor $B(t)$ een directe formule op.

d Wat voor rij is $B(t)$?

e Bereken het totaal te betalen bedrag met behulp van de juiste somregel.

Opgave 7

Bart leent € 750,00 om een computer te kopen. Deze schuld lost hij in vijftien maanden af in maandelijkse termijnen van € 50,00. Over de schuld die hij aan het begin van elke maand heeft, moet hij aan het eind van elke maand nog 1,2% rente betalen. Hij betaalt zowel de aflossing als de rente aan het eind van elke maand.

$B(t)$ is de betaling aan het eind van maand t en $B(0) = 0$. $S(t)$ is de schuld aan het begin van maand t en $S(0) = 750$.

a Stel een discreet dynamisch model op voor B en S.

b Stel een directe formule op voor $B(t)$.

c Bereken het totale bedrag dat Bart moet betalen.

Verwerken

Opgave 8

Op 1 januari 2015 heb je een saldo van € 1240,00. Je zet dat geld op een spaarrekening. Daarnaast maak je aan het begin van elke maand € 50,00 naar die spaarrekening over, te beginnen op 1 februari 2015. Aan het eind van elke maand krijg je 0,5% rente over het saldo van dat moment. Je haalt geen geld van deze spaarrekening en doet ook geen andere stortingen.

a Bereken het saldo op 1 april 2015.

b Leg uit dat je het saldo K van je bankrekening t maanden na 1 januari 2015 kunt berekenen door $K(t+1) = K(t) \cdot 1{,}005 + 50$ met $K(0) = 1240$.

c Bereken het saldo op 1 juli 2015.

Opgave 9

Staatsbosbeheer heeft een perceel waarop ongeveer 6000 bomen van een bepaalde soort kunnen staan. Dit perceel is bedoeld als productiebos: na een aantal jaar zijn de eerste bomen groot genoeg om te kunnen worden gekapt. Om een stabiele jaarlijkse opbrengst te hebben, kapt Staatsbosbeheer jaarlijks 18% van de bomen en plant 1000 bomen aan. Het eerste jaar zijn er 5000 bomen geplant.

a Stel een dynamisch model op voor het aantal bomen op dit perceel.

b Maak een tabel van het verloop van het aantal bomen van de eerste zes jaar.

c Bepaal de grenswaarde van het aantal bomen.

Opgave 10

Je wint op zeker moment € 5000 met een prijsvraag. Je zet dit geld op 1 januari 2016 vast op een rekening met 2,4% rente per jaar. Daarnaast stort je jaarlijks € 200 op deze rekening. Het saldo S hangt af van de tijd t in jaar vanaf $t = 0$ op 1 januari 2016. Hier is sprake van een discreet dynamisch model.

a Stel een passende recursieformule op.

b Stel hierbij een directe formule op. Licht je formule toe.

c Bereken met behulp van de recursieformule en de grafische rekenmachine na hoeveel jaar je meer dan € 10000 hebt gespaard op deze rekening. Controleer je antwoord met de directe formule.

Opgave 11

In 2005 leefden er in een natuurgebied 5000 konijnen. Hun aantal is in de jaren daarna telkens met 5% toegenomen.

a Ontwerp een dynamisch groeimodel voor het aantal konijnen K waarin t het aantal jaar na 2005 is.

b Plot met de grafische rekenmachine een grafiek van de groei van het aantal konijnen in de loop van de tijd. Van wat voor soort groei is er sprake?

c Bereken na hoeveel jaar er voor het eerst meer dan 15000 konijnen zijn.

Deze groei van het aantal konijnen kan niet onbeperkt doorgaan. In dit natuurgebied is slechts plaats voor een beperkt aantal konijnen. Een onderzoeker heeft een aangepast groeimodel opgesteld. Daarin is $K(t+1) = c \cdot K(t)(8000 - K(t))$, waarin $K(0) = 5000$. Dit model blijkt in 2006 precies hetzelfde geschatte aantal konijnen op te leveren als het model dat je bij a hebt ontworpen en ook in de daarop volgende jaren redelijk bij dat model te passen.

d Bereken de waarde van c.

e Maak voor dit aangepaste groeimodel een tabel van het aantal konijnen in de loop van de tijd.

Opgave 12

Als je een kop koffie uit een koffiezetter haalt, dan is de koffie meestal gloeiend heet. Neem aan dat de koffie 90 °C is.
Breng je die koffie in een kamer met een binnentemperatuur van 20 °C , dan koelt hij af. De temperatuurafname van de koffie is recht evenredig met het temperatuurverschil met de omgeving.
Gebruik voor de tijd (min) de variabele t en voor de temperatuur van de koffie (°C) de variabele T.
Neem om te beginnen een stapgrootte van $\Delta t = 1$ minuut.

a Stel een passende modelformule op; c is de evenredigheidsconstante.

Neem $c = 0{,}1$.

b Maak voor de eerste vijf minuten een tabel van de temperatuur van de koffie.

c Bereken na hoeveel minuten de temperatuur van de koffie is gezakt tot onder de 50 °C.

Opgave 13

In een gebied worden elk jaar bomen gekapt en geplant. Voor het aantal bomen B na t jaar geldt het groeimodel:

$B(t) = (1 - c) \cdot B(t-1) + 6000c$ en $B(0) = 2000$

a Na een jaar zijn er in het gebied 2320 bomen. Bereken c.

b Bereken hoeveel bomen er elk jaar worden geplant.

c De boswachter beweert dat de toename van het aantal bomen per jaar recht evenredig is met het verschil tussen het aantal bomen en het maximaal aantal bomen dat in het gebied kan staan.
Toon aan dat hij gelijk heeft.

d Stel een directe formule op voor $B(t)$.

Toepassen

Opgave 14: Medicijn toedienen

Een patiënt krijgt via een infuus een medicijn toegediend met een constante snelheid van 12 mg per uur. Het lichaam breekt dit medicijn af met een snelheid die evenredig is met de hoeveelheid medicijn die in het bloed aanwezig is. Noem de hoeveelheid in het bloed aanwezige medicijn $M(t)$, waarin t de tijd in uren is en $M(0) = 0$ mg.

a Als eerste benadering voor de waarden van $M(t)$ kun je dit proces bekijken in stappen van 1 uur. Stel hiervoor een passende modelformule op; de evenredigheidsconstante is c.

b Neem $c = 0{,}15$ en bereken de waarden van $M(t)$ voor de eerste 10 uur.

c Hoeveel medicijn zit er op den duur in het lichaam?

d Welke directe formule kun je opstellen voor $M(t)$? Leid ook uit deze directe formule af hoeveel medicijn er op den duur in het lichaam zit.

Opgave 15: Sparen voor vrije tijd

Karel heeft een prijs gewonnen en zet dit bedrag tegen een rente van 0,2% per maand op een nieuwe bankrekening. De rente wordt maandelijks aan het einde van de maand bijgeschreven. Aan het einde van elke maand stort Karel telkens hetzelfde bedrag op deze bankrekening.
Na een maand heeft hij een saldo S van € 12675,00 en na twee maanden € 12850,35.

a Stel de recursieformule voor S op.

b Als Karel meer dan € 18000,00 heeft, stort hij geen geld meer op de rekening en haalt hij aan het einde van elke maand € 1500,00 van de rekening af.

Bereken hoe vaak Karel maandelijks € 1500,00 van de bank kan halen en bereken het restbedrag dat op zijn bankrekening blijft staan.

Testen

Opgave 16

In een tank zit 100 liter water waarin 10 kg zout opgelost is. Op een bepaald ogenblik laat men aan de bovenkant 1 liter zout water per minuut naar binnen lopen. De concentratie van het binnenstromende zoute water is 50 g zout per liter. Aan de onderkant van de tank laat men 1 liter per minuut wegstromen. Na 30 minuten worden beide stromen stopgezet.

a Stel een modelformule op waarmee je de zoutconcentratie van het water in de tank kunt benaderen.

b Benader de zoutconcentratie van het water in de tank na 30 minuten.

c Schets de grafiek van de zoutconcentratie van het water in de tijd.

d Geef een directe formule voor de zoutconcentratie van het water in de tijd.

Practicum

Met de volgende practica leer je enkele technieken op de GR die bij het **werken met rijen** onontbeerlijk zijn. Vooralsnog heb je genoeg aan de eerste twee paragrafen van zo'n practicum. Je hebt dit als het goed is eerder gezien bij het onderwerp ‘Rijen’.

- **Rijen met de TI84**
- **Rijen met de TInspire**
- **Rijen met de Casio fx-CG50**
- **Rijen met de HP prime**
- **Rijen met de NumWorks**

Overigens kun je voor het werken met rijen vaak beter **Excel** gebruiken.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.