1.2 Verschil en som

Inleiding

Heb je te maken met een vaste huurverhoging per jaar, dan weet je hoeveel je jaarlijks meer moet gaan betalen voor je studentenkamer. Maar heb je een vaste procentuele huurverhoging, dan weet je dat niet onmiddellijk. Je betaalt dan immers een vast percentage van een steeds hoger wordend bedrag.
En hoe zit het met het bedrag dat je in totaal kwijt bent als je bijvoorbeeld de kamer vijf jaar huurt?

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip verschilrij en het begrip somrij en bijbehorende notaties;
- de som van een aantal termen van een rij berekenen met de rekenmachine.

Voorkennis

- rijen in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met directe formules en recursieformules.

Verkennen

Opgave V1

Stel je huurt een kamer voor 240 euro per maand, dus € 2880,00 per jaar.

- bij een jaarlijkse huurverhoging van 60 euro betaal je na n jaar $h_1(n) = 2880 + n \cdot 60$ euro/jaar.
- bij een jaarlijkse huurverhoging van 2% is de huurprijs na n jaren: $h_2(n) = 2880 \cdot 1{,}02^n$ euro/jaar.

a Bij de eerste manier van huur verhogen betaal je elk jaar 60 euro meer. Hoe zit dat bij de tweede manier?

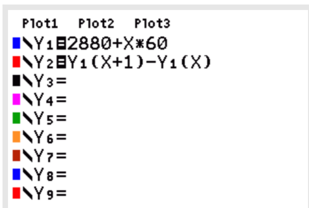
b En hoeveel ben je bij beide manieren gerekend over de eerste vijf jaar in totaal kwijt?

Uitleg

Stel je huurt een kamer voor 240 euro per maand, dus € 2880,00 per jaar.

- bij een jaarlijkse huurverhoging van 60 euro betaal je na n jaar $h_1(n) = 2880 + n \cdot 60$ euro/jaar.
- bij een jaarlijkse huurverhoging van 2% is de huurprijs na n jaren: $h_2(n) = 2880 \cdot 1{,}02^n$ euro/jaar.

Bij de eerste manier van huur verhogen betaal je elk jaar 60 euro meer. Bij de tweede manier is dit telkens een ander bedrag. De rij $V(n) = h_2(n) - h_2(n-1)$ brengt die getallen in beeld. Dit is de verschilrij van rij h_2. Je geeft hem wel aan als $V(n) = \Delta h_2(n)$.
Je kunt hem met de grafische rekenmachine wel maken, maar dan alleen als je de directe formule van de rij in de functie-mode hebt ingevoerd. In de rij-mode kun je geen verschilrij maken.

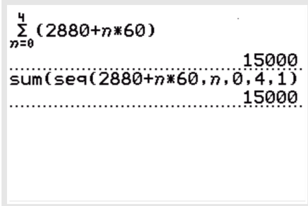


Figuur 2

Wil je weten hoeveel je over de eerste vijf jaar gerekend aan huur moet betalen, dan moet je in het eerste geval $S(4) = h_1(0) + h_1(1) + h_1(2) + h_1(3) + h_1(4)$ uitrekenen. Een korte schrijfwijze hiervoor is:

$$S(4) = \sum_{n=0}^{4} h_1(n)$$

Je rekenmachine heeft een aantal functies om dit mee te berekenen.
En voor rij h_2 gaat dit net zo...



Figuur 3

Opgave 1

In de **Uitleg** is sprake van rijen van verschillen. Die verschilrijen maak je met je grafische rekenmachine. Maar dan moet je wel de directe formule van de rij hebben.

a Maak de verschilrij V_1 bij h_1. Hij is nogal saai. Waarom is dat zo?

b Maak nu de verschilrij V_2 bij h_2.

c Hoeveel is $V_2(5)$?

d Waarom bestaan $V_1(0)$ en $V_2(0)$ eigenlijk niet?

Opgave 2

De verschilrijen in de **Uitleg** gaan over de jaarlijkse huurverhoging. Maar je kunt ook kijken naar het totaalbedrag dat je gerekend over een aantal jaren kwijt bent aan huur. Je moet daarvoor de termen van de rijen h_1 en h_2 optellen.

a $S_1(5) = h_1(0) + h_1(1) + h_1(2) + h_1(3) + h_1(4) + h_1(5)$. Hoe kun je dit korter opschrijven?

b Bereken $S_1(5)$ met je grafische rekenmachine. Wat stelt dit bedrag precies voor?

c Bereken ook $S_2(5)$ met je grafische rekenmachine.

d Is de procentuele huurverhoging de eerste zes jaar gunstiger?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **verschilrij** van een rij $u(n)$ is de rij $V(n) = \Delta u(n) = u(n) - u(n-1)$.
Je kunt hem met de grafische rekenmachine maken, maar alleen als je een directe formule van de rij in de functie-mode hebt ingevoerd. In de rij-mode kun je geen verschilrij maken.

De **somrij** van een rij $u(n)$ is de rij $S(n) = u(0) + u(1) + u(2) + u(3) + ... + u(n)$.
Een korte schrijfwijze hiervoor is:

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n} u(k)$$

De Griekse hoofdletter Σ (Sigma) wordt gebruikt als somteken. Je rekenmachine heeft een aantal functies om dit mee te berekenen.
Pas er wel voor op dat de som van de eerste n termen gelijk is aan $S(n-1)$ omdat je bij 0 begint te nummeren.

Zo is de som van de derde tot en met de twintigste term gelijk aan:

$$S(19) - S(1) = \sum_{k=2}^{19} u(k)$$

Voor je rekenmachine is dat allemaal geen probleem...
Maar let wel goed op in situaties dat er genummerd wordt vanaf 1.

Voorbeeld 1

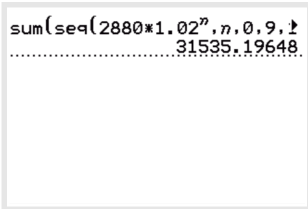
Stel je huurt een kamer voor 240 euro per maand, dus € 2880,00 per jaar.
Bij een jaarlijkse huurverhoging van 2% is de huurprijs na n jaren:
$h_2(n) = 2880 \cdot 1{,}02^n$ euro/jaar.
Stel een formule op voor jaarlijkse huurverhogingen.
Bereken de totale huurprijs over de eerste 10 jaren.

Antwoord

De formule voor de jaarlijkse huurverhogingen is de formule voor de verschilrij van h_2:
$V(n) = \Delta h_2(n) = h_2(n) - h_2(n-1) = 2880 \cdot 1{,}02^n - 2880 \cdot 1{,}02^{n-1}$
Dit kun je herleiden:
$V(n) = 2880 \cdot 1{,}02^{n-1}(1{,}02 - 1) = 57{,}6 \cdot 1{,}02^{n-1}$.
Merk op dat bij de verschilrij moet worden genummerd vanaf $n = 1$.

De totale huurprijs over de eerste 10 jaar is: $S(9) = \sum_{n=0}^{9} 2880 \cdot 1{,}02^n$.

Met de grafische rekenmachine vind je: $S(9) \approx 31535{,}20$.



Figuur 4

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** worden de verschil en som van een rij met huurprijzen nog eens bekeken.

a De nummering van de huurprijzen begint bij 0. Hoe zit dat met de verschilrij? En met de somrij?

b Maak een tabel van de verschilrij zonder er eerst een formule voor af te leiden.

c Voer zelf de afleiding van de formule voor de verschilrij uit. Ga na, dat de waarden van die verschilrij overeenkomen met de tabel bij b.

d Leg uit, waarom de totale huurprijs over de eerste 10 jaren $S(9)$ is en niet $S(10)$.

e Bereken met je grafische rekenmachine $\sum_{n=0}^{8} 2880 \cdot 1{,}02^n$. Wat heb je nu precies berekend?

Voorbeeld 2

Gegeven is de rij kwadraten door $k_n = n^2$ met n een geheel getal en $n \geq 1$. Bekijk de verschilrij en stel er een formule voor op.
Stel op grond van de verschilrij een recursieformule voor de rij kwadraten op.

Antwoord

De verschilrij is $V(n) = \Delta k_n = n^2 - (n-1)^2$.
Haakjes wegwerken geeft: $V(n) = 2n - 1$ met $n \geq 2$.

Dus is $k_n - k_{n-1} = 2n - 1$.
En dat betekent: $k_n = k_{n-1} + 2n - 1$.
De recursieformule is daarom: $k_n = k_{n-1} + 2n - 1$ met $k_1 = 1$ en n geheel en $n \geq 2$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 2** wordt de rij kwadraten bekeken.

a Leid zelf de formule voor de verschilrij V_n af. Waarom moet $n \geq 2$?

b Bereken V_{100} zowel met behulp van de formule voor V_n als vanuit de kwadratenrij zelf.

Bekijk nu de rij met derde machten: $d_n = n^3$ voor $n \geq 1$.

c Leid een formule af voor de verschilrij van d_n.

d Je ziet in **Voorbeeld 2** hoe je door naar de verschilrij te kijken een recursieformule voor de kwadratenrij kunt maken. Maak nu een recursieformule voor de rij met derde machten.

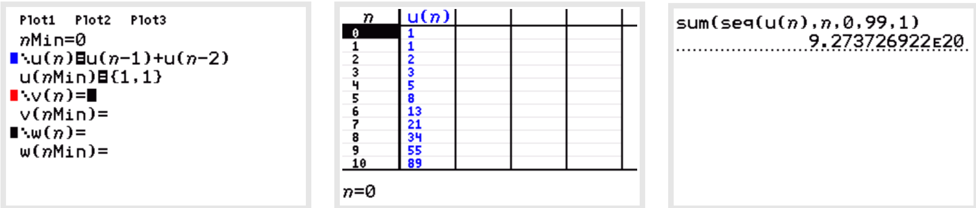
Voorbeeld 3

De beroemde rij van Fibonacci is: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...
Wat valt je op als je de bijbehorende verschilrij bekijkt?
Bereken de som van de eerste 100 termen van de rij van Fibonacci.

Antwoord

De verschilrij is: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...
Behalve de eerste term is de verschilrij gelijk aan de rij zelf, alleen de nummering verschuift met 2. (Denk er om dat er geen nulde term is bij de verschilrij!)
Noem nu de termen van de rij van Fibonacci $f(n)$ met $n = 0,1,2,...$
Dan is dus de verschilrij: $\Delta f(n) = f(n) - f(n-1) = f(n-2)$.
De rij van Fibonacci heeft daarom als recursieformule:
$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ met $f(0) = 1$ en $f(1) = 1$.

Nu kun je de rij in de grafische rekenmachine invoeren en de som van de eerste 100 termen laten berekenen door de machine. (Het kost wat rekentijd...)



Figuur 5

Opgave 5

In **Voorbeeld 3** maak je kennis met de rij van Fibonacci. Je zult er later nog toepassingen van tegenkomen.

a Bekijk hoe de recursieformule van deze rij wordt opgesteld.

b Bereken met je grafische rekenmachine de som van de eerste 20 termen van de rij van Fibonacci.

Opgave 6

Gegeven is de rij $t(i) = 5i + 2$ voor $i \geq 0$.

a Stel een formule op voor de verschilrij $V(i)$.

b Bereken $\sum_{i=0}^{5} t(i)$. Is dit nu de vierde, vijfde of de zesde term van de somrij $S(i)$? Is het $S(4)$, $S(5)$ of $S(6)$?

c Welke termen van $t(i)$ moet je optellen om $\sum_{i=2}^{5} t(i)$ te berekenen? Waarom is dit gelijk aan $S(5) - S(1)$?

Verwerken

Opgave 7

Gegeven is de rij $t(n) = 2n + 1$ met $n \geq 0$.

a Schrijf de eerste zes termen van de verschilrij $V(n)$ op.

b Schrijf de eerste zes termen van de somrij $S(n)$ op.

c Bereken $S(19)$.

d Bereken $\sum_{n=10}^{19} t(n)$.

Opgave 8

Bekijk de rij 2, 3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, ...
Je hoeft niet op zoek te gaan naar een directe formule, hoewel die wel is te vinden. De n-de term van deze rij is $u(n)$ met $n \geq 0$.

a Welke verschilrij hoort er bij deze rij?

b Beschrijf de verschilrij met een directe formule.

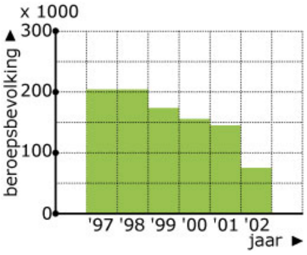
c Leid nu voor $u(n)$ een recursieformule af.

d $S(n)$ is de bijbehorende somrij. Bereken $S(20)$.

e Bereken ook $\sum_{n=15}^{20} u(n)$.

Opgave 9

Dit toenamediagram kun je opvatten als de weergave van zes termen van een verschilrij.



Figuur 6

a Schrijf de grootte (ongeveer) van deze termen op.

b Stel dat de beroepsbevolking aan het begin van 1997 bestond uit 3 miljoen personen. Hoe groot ongeveer was dan de beroepsbevolking aan het eind van 1997? En aan het eind van 1999?

c Is er een verband tussen toenamediagrammen en verschilrijen?

d Welke uitspraken over de periode 1997 tot en met 2002 hieronder zijn juist?

1. De beroepsbevolking is elk jaar toegenomen.
2. Over de hele periode is de beroepsbevolking afgenomen.
3. In 2002 is de beroepsbevolking minder toegenomen dan in 2001.
4. Aan het eind van 2002 was de beroepsbevolking kleiner dan aan het eind van 2001.

Opgave 10

De rij $t_0, t_1, t_2, \ldots$ is gegeven door $t_n = 0{,}5n^2 + 1{,}5n + 1$.

a Schrijf de eerste tien termen van deze rij op.

b Schrijf de eerste negen termen op van de verschilrij.

c Schrijf de eerste acht termen op van de verschilrij van die verschilrij.

Bekijk nu de rij $u_0, u_1, u_2, \ldots$ met $u_n = n^2 + 5n$.

d Bepaal weer een stuk van de verschilrij en de verschilrij van de verschilrij. Is er een overeenkomst met het antwoord van c? Geef een verklaring.

Toepassen

Opgave 11: Stoelen in een theater

In een theater zijn 30 rijen met stoelen. Op de eerste rij staan 40 stoelen, op de tweede rij 42, op de derde rij 44, enzovoort.

Hoeveel stoelen staan er in dit theater?

Opgave 12: Salarisverhoging

Iemand heeft een nieuwe baan. Zij begint met een jaarsalaris van € 31500,00. Elk jaar wordt haar salaris met 1,5% verhoogd.

a Stel dat deze persoon tien jaar lang deze baan houdt. Hoeveel verdient zij dan in totaal in die tien jaar? Rond af op honderden euro.

b Bepaal de jaarlijkse salarisverhogingen in de eerste zes jaar.

Opgave 13: Periodieke rijen

Een rij u_0, u_1, ... noemen we periodiek met periode p als p het kleinste positieve gehele getal is waarbij voor alle waarden van n geldt dat $u_{n+p} = u_n$.

Een voorbeeld van een periodieke rij met periode 4 is de rij 1, 5, 16, 12, 1, 5, 16, 12, 1, 5, 16, 12, ...

Gegeven is een rij u_0, u_1, u_2, ... waarvoor geldt:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_1 = 7 \\ u_{n+2} = \frac{5}{u_n \cdot u_{n+1}} \quad (n = 0,1,2,3,...) \end{cases}.$$

a Toon aan dat de rij periodiek is.

b Bereken u_{2005}.

We nemen in de bovengenoemde rij in plaats van 3 en 7 de startwaarden a en b. Dus $u_0 = a$ en $u_1 = b$.

c Bereken exact voor welke waarde van a en voor welke waarde van b de rij periode 1 heeft.

We kiezen weer $u_0 = 3$ en $u_1 = 7$.
We definiëren een bij de rij u_0, u_1, u_2, ... horende productrij P_0, P_1, P_2, ... als volgt:

$$\begin{cases} P_0 = u_0 \\ P_1 = u_0 \cdot u_1 \\ P_2 = u_0 \cdot u_1 \cdot u_2 \\ ... \\ P_n = u_0 \cdot u_1 \cdot u_2 \cdot ... \cdot u_n \quad (n = 3,4,5,...) \end{cases}$$

d Toon aan dat $P_{3k+1} = 21 \cdot 5^k$ voor elke positieve gehele waarde van k.

(bron: examen wiskunde B vwo 2005, tweede tijdvak)

Testen

Opgave 14

De rij u_0, u_1, u_2, ... is gegeven door de directe formule $u_n = n^2 - n$.

a Bereken de eerste vijf termen van de verschilrij V_n van deze rij.

b Stel een directe formule op voor V_n. Maak hiermee een recursieformule voor u_n.

c Bereken de eerste vijf termen van de somrij van deze rij.

d Bereken $\sum_{n=6}^{8} u_n$.