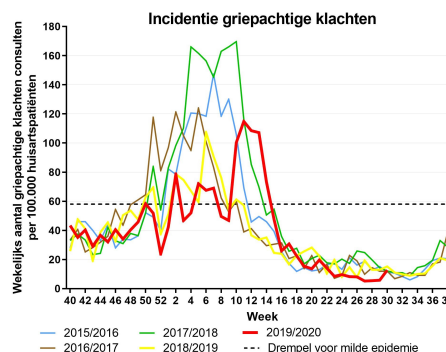


6.1 Het begrip toets

Inleiding

Vaak worden uitspraken over de hele bevolking gedaan op basis van een steekproef. Dat brengt natuurlijk risico's met zich mee. Immers ook als (bijvoorbeeld) in werkelijkheid 15% van de bevolking het afgelopen jaar griep heeft gehad, kan in een steekproef door toevallige omstandigheden dit percentage wel eens anders liggen. Hoe kun je zo een steekproef gebruiken om te schatten hoeveel griep-patiënten er zijn geweest?



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip hypothese toetsen;
- de begrippen nulhypothese, alternatieve hypothese en kritiek gebied.

Voorkennis

- werken met binomiale en normale kansverdelingen;
- de wortel-n-wet toepassen.

Verkennen

Opgave V1

Uit onderzoek blijkt dat in een bepaalde week 3,9% van de Nederlandse bevolking griep heeft gehad. In een klas van 25 leerlingen hebben diezelfde week 4 leerlingen de griep gehad, dat is maar liefst 16%.

- Hoe groot is de kans daarop als die 3,9% inderdaad voor de hele Nederlandse bevolking geldt?
- Hoeveel grieppatiënten verwacht je in deze klas als die 3,9% inderdaad geldt?
- Kun je nu zonder meer zeggen dat de 3,9% niet klopt als je meer dan het verwachte aantal grieppatiënten in de klas aantreft?
- Bij welk aantal grieplijders in deze klas heb je minder dan 5% kans dat je het percentage van 3,9% grieppatiënten ten onrechte verwerpt?

Uitleg

Op een consultatiebureau blijken de laatste tijd veel meisjes te zijn geboren: 48 van de 80 laatst geboren kinderen zijn meisjes. Dat is 60% van het totaal.

Is dit toeval of is de kans op de geboorte van een meisje inderdaad groter dan op die van een jongen?

Om te onderzoeken hoe dit zit kun je een nieuwe steekproef doen:

je vraagt bijvoorbeeld een ander consultatiebureau hoeveel meisjes er bij de 100 laatstgeborenen zijn. Je vergelijkt dan twee hypothesen:

- de nulhypothese H_0 : de kans op een meisje is 0,5
- de alternatieve hypothese H_1 : de kans op een meisje is 0,6

Je moet wel vooraf afspreken vanaf welk aantal meisjes bij de 100 laatstgeborenen je welke hypothese accepteert en welke je verwerpt: bij 50 of minder meisjes accepteer je H_0 en verwerp je H_1 , bij 60



Figuur 2

of meer accepteert je H_1 en verworpt je H_0 . Maar hoe zit het daar tussenin? Er bestaat altijd een kans dat je een hypothese ten onrechte verworpt.

Laat X het aantal meisjes bij de 100 laatstgeborenen zijn. X is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,5$ (als H_0 geldt) of $p = 0,6$ (als H_1 geldt).

Neem bijvoorbeeld aan dat je H_0 verworpt bij 55 meisjes of meer, dan is de kans dat je dit ten onrechte doet: $P(X \geq 55 | n = 100 \text{ en } p = 0,5) \approx 0,1841$.

Opgave 1

In de **Uitleg** gaat het om de geboorte van meisjes. Neem eens aan dat de kans op de geboorte van een meisje echt 0,5 is. Je bekijkt een steekproef van 100 baby's.

- Bereken de kans dat daar dan ook precies 50 meisjes bij zijn.
- Hoe groot is de kans dat er geen 50 meisjes bij zijn?
- Welke van beide kansen is het grootst? Is dat in strijd met een kans van 0,5 op de geboorte van een meisje?

Opgave 2

Je zag in de voorgaande opgave dat de kans op precies 50 meisjes in een steekproef van 100 pasgeborenen nog niet zo groot is. En dat terwijl je uitging van een kans van 50% op de geboorte van een meisje.

- Maak een kansverdeling voor het aantal meisjes in een steekproef van 100 bij een geboortekans van 0,5 voor een meisje.
Je ziet dat de kans dat er 51 meisjes in de steekproef voorkomen kleiner is dan de kans dat dit er 50 zijn. Toch is die kans niet zoveel kleiner dat je in zo'n geval gaat twijfelen aan de kans van 0,5.
- Waarom ga je bij 60 meisjes waarschijnlijk wel twijfelen?
- Bekijk opnieuw de kansverdeling uitgaande van een geboortekans van 0,5 voor een meisje. Bij welke aantallen meisjes in de steekproef is de kans daarop minder dan 1%?
- Bij welke aantallen ga je twijfelen aan de geboortekans van 0,5 in de steekproef van 100?

Opgave 3

In de **Uitleg** is sprake van een geval waarin het aantal geboren meisjes 60% van het totaal is. Ga uit van de steekproef van 100 pasgeborenen.

- Waarom is de nulhypothese $p = 0,5$ als p de kans is dat een pasgeborene een meisjes is?
- Maak uitgaande van deze nulhypothese een tabel van de kansen dat H_0 ten onrechte wordt verworpen.
- Maak uitgaande van de alternatieve hypothese een tabel van de kansen dat H_1 ten onrechte wordt verworpen.
- Voor welk aantal meisjes onder de pasgeborenen is de som van de kansen uit a en b het kleinst?
- Bij welk aantal meisjes in de steekproef zul je toch zeggen dat de kans dat een pasgeborene een meisje is 50% is?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **hypothese** is in de statistiek een vermoeden over een eigenschap van een populatie:

- de **nulhypothese** H_0 is de gangbare opvatting (bijvoorbeeld op grond van voorgaand onderzoek)
- de **alternatieve hypothese** H_1 is een uitspraak die de nulhypothese bestrijdt

Bij **hypothesen toetsen** gaat het erom door middel van een aselechte, representatieve steekproef uit de populatie te beslissen welke van beide hypothesen als waar kan worden aangemerkt: H_0 wordt verworpen of wordt niet verworpen. Je moet wel vooraf afspreken bij welke waarden je H_0 accepteert en bij welke je H_0 verworpt, dit noem je het **beslissingsvoorschrift** van de toets.

De waarden waarvoor je de nulhypothese verworpt vormen het **kritieke gebied** van de toets.

Er bestaat altijd een kans dat je H_0 **ten onrechte** verworpt.

Dat betekent: je verworpt H_0 terwijl toch H_0 eigenlijk waar is (als je maar een betere, grotere steekproef had getrokken). Dit heet een **fout van de eerste soort**.

	H_0 accepteren	H_0 verworpen
H_0 is waar	correct	fout van de eerste soort
H_1 is waar	fout van de tweede soort	correct

Tabel 1

Voorbeeld 1

Op een consulatiebureau blijken de laatste tijd veel meisjes te zijn geboren: 48 van de 80 laatst geboren kinderen zijn meisjes. Dat is 60% van het totaal.

Toets met behulp van een steekproef van 100 of de kans op de geboorte van een meisje inderdaad groter is dan op die van een jongen.



Figuur 3

Antwoord

Je vergelijkt $H_0: p = 0,5$ met $H_1: p = 0,6$.

Vanaf welk aantal meisjes in de steekproef van 100 verwerp je H_0 ?

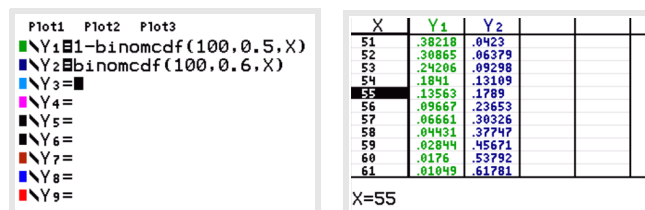
Er bestaat altijd een kans dat je H_0 ten onrechte verworpt of ten onrechte accepteert.

Laat X het aantal meisjes in de steekproef zijn. X is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = 0,5$ (als H_0 geldt) of $p = 0,6$ (als H_1 geldt).

Als je H_0 verworpt bij meer dan g meisjes, dan is de kans dat je dit ten onrechte doet: $P(X > g | n = 100 \text{ en } p = 0,5)$.

Als je H_0 accepteert bij g meisjes of minder, dan is de kans dat je dit ten onrechte doet: $P(X \leq g | n = 100 \text{ en } p = 0,6)$.

Je ziet hier een lijst van dergelijke kansen.



Figuur 4

Bij $g = 55$ zijn beide kansen samen het kleinst.

Je zou als kritieke gebied kunnen kiezen: $g > 55$.

Opgave 4

Als het goed is heb je in **Opgave 3** het probleem dat in **Voorbeeld 1** wordt besproken al zelf uitgevoerd.

- Leg nog eens uit waarom de kans dat je ten onrechte H_0 verworpt gelijk is aan $P(X > g | n = 100 \text{ en } p = 0,5)$. Is dit een fout van de eerste of van de tweede soort?
- Leg nog eens uit waarom de kans dat je ten onrechte H_0 accepteert gelijk is aan $P(X \leq g | n = 100 \text{ en } p = 0,6)$. Is dit een fout van de eerste of van de tweede soort?
- Wat is nu je conclusie als je in de steekproef 55 meisjes en dus 45 jongetjes aantreft?

Opgave 5

Je kunt in **Voorbeeld 1** ook $H_0 : p = 0,5$ vergelijken met $H_1 : p > 0,5$.

- Waarom kun je nu niet zo maar vaststellen bij welk aantal meisjes in de steekproef van 100 je H_0 verworpt?
- Stel je verworpt H_0 als het aantal meisjes groter is dan 55. Hoe groot is dan de kans dat je dit ten onrechte doet?
- Maak een tabel van dergelijke kansen voor $g = 55$ tot en met $g = 65$.
- Vanaf welke waarde van g is de bedoelde kans kleiner dan 5%? Wat is dan het kritieke gebied van de toets?
- Vanaf welke waarde van g is de bedoelde kans kleiner dan 1%? Wat is dan het kritieke gebied van de toets?

Voorbeeld 2

De inhoud van een fles cola is ongeveer 1,5 L.

Omdat de fabrikant volgens Europese richtlijnen niet teveel klanten mag teleurstellen moet hij zijn flessen met een volume V dat normaal is verdeeld met gemiddeld 1530 mL en een standaardafwijking van 18 mL vullen. Nu bevat minder dan 5% van zijn flessen te weinig cola.



Figuur 5

Hij controleert regelmatig de afstelling van zijn vulmachine door in een steekproef van 25 flessen het gemiddelde volume te meten. Hij besluit de machine bij te stellen als hij minder dan 1525 of meer dan 1535 mL vindt. Hoe groot is de kans dat hij dit ten onrechte doet?

Antwoord

In een steekproef van 25 flessen moet - als de vulmachine goed is afgesteld - volgens de \sqrt{n} -wet het vulvolume \bar{V} normaal zijn verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 1530$ mL en een standaardafwijking van $\sigma = \frac{18}{\sqrt{25}} = 3,6$ mL.

Je toetst $H_0 : \mu = 1530$ tegen $H_1 : \mu \neq 1530$.

Het kritieke gebied is $\bar{V} < 1525$ of $\bar{V} > 1535$.

De kans dat H_0 ten onrechte wordt verworpen is:

$$P(\bar{V} < 1525 \vee \bar{V} > 1535 | \mu = 1530 \text{ en } \sigma = 3,6) \approx 0,1649.$$

Opgave 6

In **Voorbeeld 2** wordt het afstellen van een vulmachine bekeken.

- Ga na, dat inderdaad minder dan 5% van de flessen te weinig cola bevatten als de afstelling van de machine klopt.
- Waarom zal de fabrikant de afstelling veranderen als hij te weinig en als hij te veel cola in zijn flessen stopt?
- Reken de kans dat hij ten onrechte besluit de machine bij te stellen nog even na. Is dit een fout van de eerste of de tweede soort?

- d De kans bedoeld bij c is aan de hoge kant. Wat moet de fabrikant met het kritieke gebied doen om die kans kleiner te maken?

Opgave 7

In beide voorbeelden is er sprake van de kans dat de nulhypothese ten onrechte wordt verworpen.

- a Waarom kun je die kans niet gewoon 0 maken?
 b Waarom zou je deze kans een overschrijdingskans kunnen noemen?

Verwerken

Opgave 8

Er wordt onderzocht of een inpakmachine voor rollen koekjes goed is afgesteld. Er zouden 20 koekjes in een rol moeten gaan.

Noteer de variabele, nulhypothese en alternatieve hypothese van de toets.

Opgave 9

Beschrijf bij elke van de onderzoeken hoe een bijbehorende toets er uit zal zien.

- a Een onderzoek naar de bewering van een politicus dat meer dan 50% van de kiezers op hem gaat stemmen.
 b Een consumentenbond doet onderzoek naar de levensduur van lampen.
 c De kwaliteitsafdeling van een fabriek onderzoekt de hoeveelheid shampoo in flessen.

Opgave 10

Leraar A denkt uit jarenlange ervaring dat slechts 60% van de leerlingen zich ook echt aan zijn planning houdt. Leraar B vermoedt dat dit toch wel bij 75% van de leerlingen het geval is. Ze besluiten in hun klassen een controle te houden. Het gaat daarbij om 80 leerlingen.

- a Hoe luiden de nulhypothese en de alternatieve hypothese?
 Ze spreken een grens af van 54: bij meer dan 54 leerlingen die 'bij' zijn krijgt B gelijk, anders leraar A.
 b Hoe groot is de kans dat B ten onrechte ongelijk krijgt?
 c En hoe groot is de kans dat A ten onrechte ongelijk krijgt?
 d Bepaal de grens g zo, dat de kans op deze fouten voor beide docenten samen zo klein mogelijk is.

Opgave 11

In een bepaald gebied lijdt volgens de krant 15% van de mensen aan griep. De afdelingsleider van de bovenbouw van de enige havo/vwo school in dat gebied constateert dat er op datzelfde moment van zijn 350 leerlingen 45 ziek zijn. Dat is minder dan 15%.

- a Mag zij nu concluderen dat de krant overdrijft? Licht je antwoord toe.
 Ze besluit om de sectie wiskunde te vragen om met een groep leerlingen dit ziektepercentage te onderzoeken. Het groepje leerlingen gaat in een aselechte steekproef van 500 personen navragen wie er op de dag dat deze krant verscheen de griep hadden.
 b Welke nulhypothese en welke alternatieve hypothese gaan ze hanteren?
 c Ze kiezen voor hun kritieke gebied 70 of minder zieken in de steekproef. Hoe groot is dan de kans dat ze ten onrechte concluderen dat de krant overdrijft?
 d Hoe kunnen ze die kans verkleinen?
 e Waarom heeft het weinig zin om het kritieke gebied zo te maken dat die kans afgerond op vier decimalen 0 is?

Opgave 12

De gemiddelde lengte van vrouwen is bij benadering normaal verdeeld. In 1999 was de gemiddelde lengte van de vrouwen in Nederland 167 cm met een standaardafwijking van 6,5 cm. Het is niet ondenkbaar dat de gemiddelde lengte van de Nederlandse vrouw sinds die tijd groter is geworden. Een onderzoeksbureau onderzoekt dit door middel van een aselechte steekproef van 100 vrouwen in Nederland. Vooraf stellen de onderzoekers dat ze zullen concluderen dat de Nederlandse vrouw langer is geworden als de gemiddelde lengte in die steekproef 169 cm of meer is.

- Welke nulhypothese hanteert het bureau? En hoe luidt de alternatieve hypothese?
- Wat is het kritieke gebied van deze toets? Waarom moet dit vooraf worden vastgesteld?
- Hoe groot is de kans dat men ten onrechte concludeert dat de Nederlandse vrouw langer is geworden?
- Hoe kan die kans worden verkleind door het kritieke gebied aan te passen?
- Is de grootte van de steekproef ook van invloed op die kans?

Toepassen**Opgave 13: Suikerziekte**

Een onderzoeker voert een hypothesetoets uit naar de toename van suikerziekte onder Nederlanders. De gegevens van het onderzoek zijn:

X is het aantal Nederlanders met suikerziekte in een steekproef.

p is het deel van de mensen uit de steekproef met suikerziekte.

$$H_0 : p = \frac{1}{15}$$

$$H_1 : p > \frac{1}{15}$$

De steekproefomvang is 1000.

Als het aantal Nederlanders met suikerziekte blijkt te zijn gestegen, wil de onderzoeker heel zeker zijn over deze uitkomst. Hij wil dus de kans dat H_1 wordt aangenomen terwijl H_0 waar is, klein maken.

- Welk kritieke gebied moet hij kiezen om ervoor te zorgen dat deze kans kleiner is dan 10%?
- Welk kritieke gebied moet hij kiezen om ervoor te zorgen dat deze kans kleiner is dan 5%?
- Welk kritieke gebied moet hij kiezen om ervoor te zorgen dat deze kans kleiner is dan 1%?

Opgave 14: Dekking van verf

Een fabrikant van verf stelt dat zijn witte verf een oppervlakte dekt van 15 m² per liter. Omdat dit een goede dekking is, besluit een schildersbedrijf met deze verf te werken. Na een tijdje gelooft het management van het schildersbedrijf echter dat de voorgestelde dekking van 15 m² per liter te hoog is. Er lijkt namelijk meer verf nodig te zijn dan berekend: de ingekochte emmers zijn sneller op dan verwacht.

Het besluit is om de dekking van de verf te toetsen. Het besluit wordt: bij een dekking van minder dan 13,5 m² per liter is deze inderdaad niet goed genoeg, en wordt een andere verfsoort gebruikt.

- Noteer de variabele(n), de nulhypothese, de alternatieve hypothese en het kritieke gebied.
- Het management lijkt voorzichtig met zijn keuze. Noem redenen waarom het bedrijf niet direct overstapt op nieuwe verf.

Testen

Opgave 15

Iemand beweert dat 10% van het niet-brildragende deel van de Nederlandse bevolking contactlenzen draagt. Maar hij raakt na een paar keer vragen aan het twifelen, wellicht is dat percentage toch hoger. Hij besluit om zijn mening te toetsen in een representatieve steekproef van 50 personen.

- a Hoe luiden de nulhypothese en de alternatieve hypothese?
- b Als hij bij 10 of meer personen in de steekproef met contactlenzen zijn oorspronkelijke mening verwerpt, hoe groot is dan de kans dat hij dit ten onrechte doet?
- c Als hij bij 100 of meer personen met contactlenzen in een steekproef van 500 zijn oorspronkelijke mening verwerpt, hoe groot is dan de kans dat hij dit ten onrechte doet?

Opgave 16


Het vulgewicht van kilopakken suiker van merk A is volgens de fabrikant normaal verdeeld met een gemiddelde van 1005 gram en een standaardafwijking van 3 gram. In een restaurant worden 10 van die pakken suiker gekocht en de restauranthouder ontdekt dat in die 10 pakken gemiddeld maar 998 gram suiker zit.

- a Mag de restauranthouder op grond van deze steekproef zonder meer aannemen dat de fabrikant zijn vulmachine moet bijstellen?
- b Hoe groot is de kans dat de restauranthouder ten onrechte reclameert?
- c De fabrikant controleert zijn vulmachine door 100 pakken te wegen. Hij vindt een gemiddelde gewicht van 1002 gram. Omdat dit aan de lage kant is besluit hij zijn vulmachine bij te stellen. Hoe groot is de kans dat hij dit terecht doet?



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostroaat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
