5.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Continue kansmodellen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!
Merk op dat het nu ook nuttig is om het onderwerp ‘Discrete kansmodellen’ nog een keer te bekijken. In veel opgaven worden zowel de normale verdeling als de binomiale verdeling gebruikt.

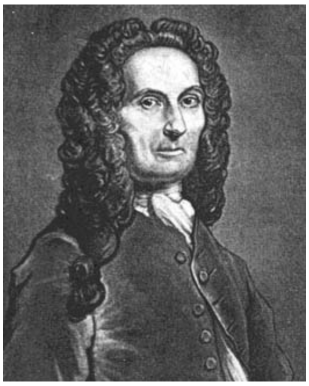
Begrippenlijst

- continue stochast — kansdichtheidsfunctie — normaalkromme
- normale stochast — μ en σ bij een normale stochast — normale kansen
- de standaardnormale stochast — standaardiseren — de wortel-*n*-wet voor een steekproef uit een normale verdeling
- normaal waarschijnlijkheidspapier
- de centrale limietstelling

Activiteitenlijst

- bij een continue stochast kansen bepalen — eigenschappen van de normaalkromme
- kansen berekenen bij een normale stochast — grenswaarden berekenen bij gegeven normale kansen
- standaardiseren — μ of σ berekenen bij een normale verdeling
- met normaal waarschijnlijkheidspapier onderzoeken of er van een normale verdeling sprake is
- een binomiale stochast benaderen met een normale stochast.

Achtergronden



Figuur 1 Abraham de Moivre

In 1718 publiceerde **Abraham de Moivre** (1667—1754) ‘The Doctrine of Chance’, een boek over kansrekening waarin de eerste definitie van statistische onafhankelijkheid verschijnt, naast de aanpak van allerlei problemen op het gebied van dobbelen en andere kansspelen.

Bij de bestudering van herhaalde trekkingen (met teruglegging) van een schijf uit een vaas met alleen zwarte en witte schijven waarbij de kans op een zwarte en een witte schijf even groot is, ontdekte De Moivre dat een bijpassende kansverdeling een histogram heeft dat netjes klokvormig is. Later werd dit probleem gesimuleerd met het **bord van Galton** waarin balletjes naar beneden vallen op een aantal rijen met pinnen.

De Moivre bestudeerde ook sterftetabellen en werkte aan de theorie van de wiskunde rond levensverzekeringen.
In 1733 leidt hij de formule voor de normaalverdeling als benadering van de binomiale verdeling af.

De Duitse wiskundige **Carl Friedrich Gauss** (1777—1854) toonde aan dat de verdeling van meetfouten de normaalverdeling was en de bijbehorende verdelingskromme heet dan ook de gausskromme. In 1812 publiceerde de Franse wiskundige Laplace over deze onderwerpen het boek ‘Théorie analytique des probabilités’, wat tientallen jaren lang als standaardwerk over waarschijnlijkheidsrekening was.

Testen

Opgave 1

Open het Excelbestand **Gegevens 154 leerlingen**. Hierin zie je een tabel met gegevens van 154 leerlingen, jongens en meisjes door elkaar.

a Bereken de gemiddelde lichaamslengte en de standaarddeviatie zowel voor de jongens als voor de meisjes.

b Maak voor beide groepen een klassenindeling van de lichaamslengtes, zorg er voor dat je ongeveer 10 klassen hebt.

c Teken op normaal waarschijnlijkheidspapier de bijbehorende cumulatieve relatieve frequentieverdelingen.

d Zijn de lichaamslengtes van beide groepen bij benadering normaal verdeeld? Lees de gemiddeldes en de standaardafwijkingen uit je figuur af en vergelijk ze met de berekende waarden.

e Hoeveel procent van de jongens is kleiner dan het gemiddelde van de meisjes?

f Hoeveel procent van de meisjes is groter dan het gemiddelde van de jongens?

Opgave 2

In een fabriek worden sokken machinaal vervaardigd. De gemiddelde lengte van een sok blijkt 47 cm te zijn. De lengte van de sokken is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 0,2 cm. De sokken worden in paren verkocht. In de fabriek worden paren gevormd door willekeurig twee sokken bij elkaar te stoppen.

a Als één sok een lengte heeft van 46,5 cm, hoe groot is dan de kans dat het lengteverschil met de andere sok van het paar meer dan 0,7 cm bedraagt?

b Als de eerste sok een lengte heeft van 49,5 cm, is dan de kans dat het lengteverschil met de andere sok van het paar meer dan 0,7 cm is even groot? Licht je antwoord toe.

c Bepaal deze kans.

Opgave 3

De zwangerschapsduur bij mensen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 266 dagen en een standaarddeviatie van 16 dagen.

a Bij een premature geboorte wordt het kind minstens drie weken voor het gemiddelde geboren. Hoe groot is de kans daar op?

b In 7% van de gevallen duurt een zwangerschap zo lang dat de geboorte moet worden ingeleid. Vanaf welke zwangerschapsduur gebeurt dit dus?

c In 1973 beweerde een vrouw dat ze 310 dagen zwanger was geweest omdat op de dag van de bevalling haar man al 310 dagen als marinier van huis was. Hoe groot is de kans op een zwangerschap van minstens 310 dagen?

Opgave 4

In een fabriek verpakt een machine in kleine zakjes poedermelk voor in de koffie. Elk van die zakjes hoort 3 gram melkpoeder te bevatten. De fabrikant heeft zijn machine zo afgesteld dat het vulgewicht van deze zakjes normaal is verdeeld met een gemiddelde van 3,1 gram en een standaardafwijking van 0,06 gram.

a Hoeveel procent van de zakjes melkpoeder die deze machine produceert is te licht?

b Je koopt een doosje met daarin 20 zakjes van die melkpoeder. Hoe groot is de kans dat je in totaal minder dan $20 \cdot 3 = 60$ gram melkpoeder hebt gekocht?

c Hoeveel gram melkpoeder verwacht je gemiddeld per zakje in het doosje met 20 zakjes? En welke standaardafwijking hoort daar bij?

De fabrikant voldoet hiermee niet aan de richtlijnen van de Europese Unie op dit gebied. Die schrijven voor dat niet meer dan 1% van de zakjes poedermelk minder dan 3 gram mag bevatten.

d De fabrikant besluit om iets meer melkpoeder in de zakjes te doen. Op welk gemiddelde vulgewicht moet hij de machine instellen om aan de richtlijn van de EU te voldoen? (Ga er van uit dat de standaarddeviatie van de verdeling van de vulgewichten hetzelfde blijft.)

e Achteraf bezien vindt de fabrikant de oplossing die hij heeft gekozen bij b toch te duur. Hij laat de machine nauwkeuriger afstellen en houdt het gemiddelde vulgewicht op 3,1 gram. Welke standaardafwijking moet de verdeling van de vulgewichten nu krijgen om aan de richtlijn van de EU te voldoen?

Opgave 5

In een bedrijf wordt onder andere margarine geproduceerd. Het eindproduct wordt via een vulmachine in kuipjes gegoten, die volgens het opschrift een inhoud hebben van 500 g. De gewichten van de gevulde kuipjes blijken normaal verdeeld te zijn. De standaarddeviatie is ongeacht het vulgewicht waarop de vulmachine ingesteld staat steeds 4 g. Het gemiddelde gewicht van zo'n kuipje is gelijk aan het vulgewicht waarop de machine is ingesteld.

a Hoe groot is de kans dat het gewicht van een vol kuipje tussen 496 en 502 g ligt?

De kuipjes worden verpakt in kartonnen dozen waarvan het gewicht normaal verdeeld is. Het gemiddelde gewicht is 400 g met een standaardafwijking van 15 g. In één doos gaan 20 kuipjes.

b Het gewicht van de volle dozen is ook weer normaal verdeeld. Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van het gewicht van deze dozen.

De keuringsdienst van waren gaat regelmatig na of de fabriek wel voldoende margarine in de kuipjes doet. Daartoe nemen ze één volgepakte doos uit de dagproductie en wegen die. Als het totale gewicht meer dan 50 g naar beneden afwijkt van het gemiddelde, krijgt de fabrikant een boete.

c Hoe groot is de kans op een boete, als de fabrikant het vulgewicht van 500 g aanhoudt?

Natuurlijk zou de keuringsdienst van waren ook de 20 kuipjes zonder de bijbehorende doos kunnen wegen. Ook nu wordt een boete gegeven als 50 g minder dan het gemiddelde gemeten zou worden.

d Waarom is deze controle eerlijker dan de eerste?

e In welk van de twee gevallen is de kans op een boete het kleinst? Waarom?

Op een gegeven moment worden de eisen door de keuringsdienst van waren veranderd. In het vervolg zullen 100 kuipjes op hun gewicht gecontroleerd worden. Daarbij mogen er maximaal 4 zijn die minder dan 492 g wegen.

f Hoe groot is nu de kans op een boete, aangenomen dat de fabrikant de machine nog steeds op 500 g heeft ingesteld?

g De kans op een boete kan verkleind worden door het vulgewicht te verhogen. Hoe hoog moet het ingesteld worden om te bereiken dat de kans op een gewicht van minder dan 492 g nog maar 1% is?

Opgave 6

Een atleet heeft zich gespecialiseerd in het verspringen. Zijn sprongen blijken normaal te zijn verdeeld met een gemiddelde van 8,60 m en een standaarddeviatie van 10 cm. Om in aanmerking te komen voor afvaardiging naar de Olympische Spelen, moet hij in zijn eigen land drie keer voldoen aan de zogenaamde Olympische limiet. Dat betekent, dat hij drie keer verder moet springen dan een door het landelijk Olympisch comité vastgestelde afstand. In dit geval bedraagt die afstand 8,70 m.

a Bepaal de kans dat de atleet bij één sprong de limiet haalt.

b Hoe groot is de kans dat hij bij drie achtereenvolgende sprongen drie keer de limiet overschrijdt?

c Binnen vier maanden moet deze atleet drie keer de gestelde limiet halen. In deze vier maanden zijn er twee door het landelijk Olympisch comité erkende wedstrijden met elk drie sprongen. Bereken de kans dat de atleet precies drie keer de limiet haalt.

d Het Olympisch record bedraagt 8,80 m. Op de Olympische Spelen heeft de atleet drie sprongen om zijn kansen te verdedigen. Hoe groot is de kans dat het hem lukt op de Olympische Spelen één keer dit record te verbeteren?

De voorwaarde waaraan voldaan moet worden om naar de Olympische Spelen te worden uitgezonden bestaat uit 4 elementen:

- de gestelde limiet moet worden gehaald;
- dat moet drie keer gebeuren;
- het moet in een bepaald aantal sprongen gerealiseerd worden;
- het moet binnen een bepaalde tijdsspanne worden verricht.

e Welke van deze vier elementen heeft de grootste invloed op het al of niet uitzenden naar de Olympische Spelen? Motiveer je antwoord.

Opgave 7

Een schroefas van een schip verbindt de motor met de schroef. Deze as wordt op een of meer plaatsen ondersteund door een lager. Dit lager is een bronzen bus waarvan de binnendiameter zo goed mogelijk passend wordt gemaakt om de diameter van de as en waarin zich goed geoliede kogels bevinden die het draaien van de as mogelijk maken.
Er wordt gestreefd naar een binnendiameter van 15,0 mm van de bussen (en dus de lagers) en naar een diameter van 14,9 mm voor de assen. Na fabricage zijn zowel de binnendiameter van de lagers als de diameters van de assen normaal verdeeld:

Figuur 2

- voor de assen geldt: $\mu = 14{,}9$ mm en $\sigma = 0{,}1$ mm;
- voor de lagers geldt: $\mu = 15{,}0$ mm en $\sigma = 0{,}1$ mm.

Assen met een diameter groter dan 15,1 mm en lagers met een binnendiameter kleiner dan 14,8 mm worden na een test afgekeurd.

a Hoeveel procent van de assen heeft een diameter groter dan 15,15 mm?

b Hoeveel procent van de lagers heeft een binnendiameter kleiner dan 14,85 mm?

c Bereken de diameter waarvoor geldt: de kans op een as met die diameter is gelijk aan de kans op een lager met die binnendiameter.

Uit een grote hoeveelheid, die evenveel assen als lagers bevat, neem je willekeurig een as en een lager. Het verschil van de binnendiameter van de lager en de diameter van de as is een normaal verdeelde toevalsvariabele V. Als de lager niet om de as past is $V < 0$.

d Welke waarden hebben het gemiddelde en de standaardafwijking van V?

e Hoe groot is de kans dat de lager niet om de as past?

Opgave 8

Een continue stochast X heeft als kansdichtheidsfunctie:

$f(X) = a\left(75 - 3x^2\right)$ als $0 \leq X \leq 5$

$f(X) = 0$ als $X < 0 \vee X > 5$

a Bereken a.

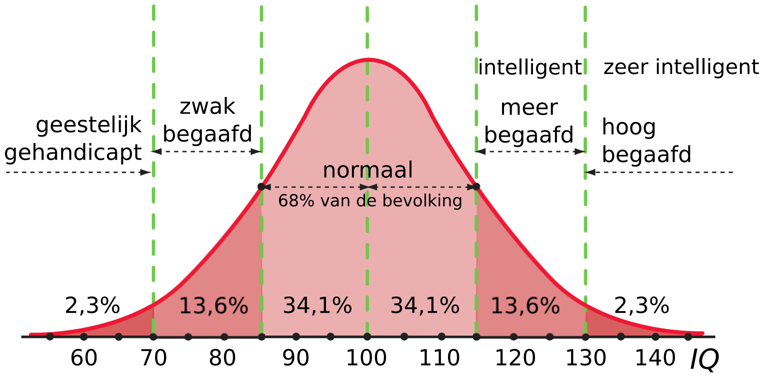
b Bereken de kans dat X inligt tussen 2 en 4.

c Bereken k als $P(X \leq k) = 0{,}05$ in drie decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 9: Intelligentiequotiënt

In het begin van de vorige eeuw werd er veel waarde gehecht aan het zogenaamde **intelligentiequotiënt (IQ)** van met name kinderen. In 1904 werd de psycholoog **Alfred Binet (1857—1911)** door de Franse overheid gevraagd een test te ontwerpen om 'slimme' van 'domme' kinderen te onderscheiden.



Figuur 3

Binet ontwierp een intelligentietest waarmee hij de intelligentieleeftijd van een kind vaststelde. Wanneer de intelligentieleeftijd wordt gedeeld door de werkelijke leeftijd (en met 100 vermenigvuldigd) dan krijg je het IQ. Dit IQ is normaal verdeeld met een gemiddelde dat op 100 is gesteld. Zo is de Stanford-Binet intelligentieschaal ontwikkeld. Bekijk de normale verdeling van de IQ's zoals Binet die aantrof.

a Welk gemiddelde en welke standaardafwijking heeft het IQ volgens de Stanford-Binet-schaal?

b Is het IQ afhankelijk van je leeftijd?

c Hoeveel procent van de mensen heeft een minder dan normale intelligentie?

d Hoeveel procent van de mensen heeft een IQ van boven de 140?

e Welk IQ heeft de meest intelligente 10% van de bevolking volgens de Stanford-Binet-schaal?

Examen

Opgave 10: Cakemeel

In een fabriek worden pakken met cakemeel gevuld. Op zo'n pak wordt vermeld: "Inhoud 500 gram". Veronderstel dat de inhoud per pak normaal verdeeld is met een gemiddelde van 500 g en met een standaarddeviatie van 4 g.

a Bereken in één decimaal nauwkeurig het percentage pakken dat minder dan 495 g cakemeel bevat.

Volgens de fabrikant betekent de vermelding "Inhoud 500 gram" dat slechts 25% van de pakken minder dan 500 g inhoud heeft. Als een pak een inhoud van minder dan 500 g heeft, spreekt hij van ondergewicht. Veronderstel bij de volgende drie vragen dat de fabrikant gelijk heeft en dat de standaarddeviatie van de normaal verdeelde inhoud 4 g bedraagt.

b Bereken in één decimaal nauwkeurig de gemiddelde inhoud per pak.

In een rek van een kruidenierswinkel staan 20 pakken cakemeel afkomstig van bovengenoemde fabriek. Daarvan hebben er 5 een ondergewicht. Een klant neemt aselect 3 pakken uit het rek.

c Bereken in twee decimalen nauwkeurig de kans dat geen van deze 3 pakken een ondergewicht heeft.

d Een banketbakker koopt 16 pakken rechtstreeks van de fabriek. Bereken in drie decimalen nauwkeurig de kans dat hij minder dan 8000 g cakemeel heeft gekocht.

(bron: examen wiskunde A vwo 1986, eerste tijdvak)

Opgave 11: Zeeppoeder

Een grootwinkelbedrijf heeft in zijn assortiment een eigen merk zeeppoeder. Het bedrijf beschikt over een vulmachine met een vulcapaciteit van 7536 kg per dag. Van de door de machine gevulde pakken is het gewicht normaal verdeeld, met een standaardafwijking van 40 g ongeacht de inhoud. De keuringsdienst van waren eist dat, op één decimaal nauwkeurig, slechts 4,0% van de in de handel gebrachte pakken minder mag bevatten dan op de pakken vermeld staat. Het bedrijf brengt zeeppoeder op de markt in kleine pakken, waarop vermeld staat dat zij 1 kg zeeppoeder bevatten.
De vulmachine is ingesteld op 1070 g per pak.

a Onderzoek of aan de eis van de keuringsdienst van waren wordt voldaan.

De bedrijfsleiding overweegt om naast de kleine pakken met opschrift 1 kg ook gezinspakken met opschrift 2,5 kg op de markt te brengen.

b Op hoeveel gram per pak moet de vulmachine ingesteld worden voor de gezinspakken om aan de eis van de keuringsdienst van waren te voldoen?

c Neem aan dat het aantal geproduceerde kleine pakken twee maal zo groot is als het aantal gezinspakken. Hoeveel gezinspakken kunnen er dan maximaal per dag worden geproduceerd?

(bron: examen wiskunde A vwo 1984, eerste tijdvak)

Opgave 12: Bewaking

Een zekere bank wordt ’s nachts intensief bewaakt. Meerdere malen per nacht doet één van de bewakers een ronde door het gebouw. Op zo’n ronde moet hij zich op vijftien plaatsen melden door een speciale code in te toetsen in een meldkastje. De computer in de controlekamer registreert de tijdstippen waarop dit gebeurt. Ook schrijft de procedure voor dat de tijdstippen van vertrek en terugkomst worden geregistreerd. De kastjes zijn zodanig op de route geplaatst dat de zestien loopafstanden vrijwel even lang zijn. Uit overzichten over langere tijd blijkt dat, in het geval dat er niets bijzonders valt op te merken, de lengte van de tijdsintervallen tussen twee opeenvolgende meldingen van de bewaker vrijwel normaal verdeeld is met een gemiddelde van 3,6 minuten en een standaarddeviatie van 0,7 minuten. In het geval dat een melding langer dan vijf minuten uitblijft, wordt een bewaker in de controlekamer automatisch gewaarschuwd dat er mogelijk iets aan de hand is.
De bewaker heeft zich zojuist gemeld bij het vijfde kastje.

a Bereken in gehele procenten de kans dat onder normale omstandigheden de volgende melding langer dan 5,0 minuten uitblijft.

b Veronderstel dat de lengtes van de 16 tijdsintervallen bij een ronde door het gebouw onder normale omstandigheden onafhankelijk van elkaar zijn. Bereken in gehele procenten de kans dat onder normale omstandigheden de totale tijd van een ronde door het gebouw langer is dan 60,0 minuten.

Tijdens zo’n ronde kijkt de bewaker wel enige keren in de gang naar de kluis, maar hij gaat er niet in. In de gang naar de kluis is namelijk een alarminstallatie aangebracht die in directe verbinding staat met de meldkamer op het hoofdbureau van de politie. In het plafond zijn (onzichtbaar) vijf roterende sensoren aangebracht. 's Nachts gaat het alarm automatisch af zodra minstens één van deze sensoren geactiveerd wordt. De sensoren werken geheel onafhankelijk van elkaar. Voor elke sensor afzonderlijk geldt dat de kans op alarm (de detectiekans) in het geval dat iemand ’s nachts de sensor passeert, gelijk is aan 0,45.

c Toon met een berekening aan dat de kans dat het alarm bij de politie afgaat als iemand ’s nachts de gehele gang aflegt, ongeveer gelijk is aan 95%.

De directie vindt deze kans te klein. Zij wil de sensorinstallatie zo laten verbeteren dat de kans op alarm als iemand 's nachts de gehele gang aflegt, groter is dan 99,5%. Volgens de chef van de beveiliging kan dit op twee manieren bereikt worden:

- Het aantal sensoren met een detectiekans van 0,45 wordt uitgebreid; per bij te plaatsen sensor kost dit € 8000,00.
- Een aantal van de aanwezige sensoren wordt omgeruild tegen een nieuw type met een detectiekans van 0,80; per in te ruilen sensor kost dit € 9000,00.

d Bereken hoeveel men minimaal moet uitgeven om de sensorinstallatie zodanig te verbeteren dat aan de wens van de directie wordt voldaan.

(bron: examen wiskunde A vwo 1991, tweede tijdvak)

Opgave 13: Lengte van vrouwen

In 1972 spande een groep vrouwen een proces aan tegen een fabriek in Texas die apparaten voor airconditioning produceert. Deze fabriek nam alleen personeelsleden in dienst die langer waren dan 170,0 cm. De vrouwen waren bij hun sollicitatie afgewezen omdat ze niet aan deze eis voldeden. De advocaat van de vrouwen benadrukte het discriminerende karakter van deze aanstellingsvoorwaarde door te stellen dat 91,0% van alle Amerikaanse vrouwen tussen 18 en 65 jaar niet lang genoeg was om aangenomen te kunnen worden. Dit percentage ontleende hij aan een onderzoek van het Amerikaanse ministerie van volksgezondheid. Neem aan dat de lengte van de Amerikaanse vrouwen in de betreffende leeftijdsgroep normaal verdeeld is met een gemiddelde μ en standaarddeviatie σ.

a Stel, uitgaande van het genoemde percentage, een verband op tussen μ en σ.

Neem aan dat $\mu = 160{,}4$ cm.

b Toon aan dat $\sigma \approx 7{,}2$ cm.

Stel je voor dat de groep Amerikaanse vrouwen tussen 18 en 65 jaar die langer zijn dan 170,0 cm V wordt genoemd. Voor de mediaan (m) van de lengte van de vrouwen van V geldt dat 50% van de vrouwen uit V langer is dan m.

c Toon aan dat $m \approx 172{,}6$, uitgaande van $\mu = 160{,}4$ cm en $\sigma = 7{,}2$ cm.

De vertegenwoordiger van de fabriek bij het proces noemde het percentage van 91% sterk overdreven. Het door de tegenpartij aangehaalde onderzoek stamde uit 1948. De gemiddelde lengte van volwassenen was volgens hem in de periode 1948-1972 flink toegenomen. Hij ondersteunde zijn betoog met het resultaat van een recent onderzoek. In een aselect gekozen groep van 10.000 vrouwen in de leeftijd 18 tot 65 jaar werden 1243 vrouwen aangetroffen met een lengte van meer dan 172,6 cm.

d Als je aanneemt dat de standaardafwijking niet is veranderd, wat is dan de gemiddelde lengte van de Amerikaanse vrouw volgens dit recente onderzoek?

De advocaat van de vrouwen gaf toe dat het door hem aangehaalde onderzoek wat verouderd was en de gemiddelde lengte van de vrouwen waarschijnlijk wel was toegenomen. Hij bleef echter benadrukken dat ook in 1972 nog steeds een grote meerderheid van de Amerikaanse vrouwen op grond van hun lengte door het bedrijf zou worden afgewezen. Stel dat voor 1972 gold: $\mu = 164{,}0$ cm en $\sigma = 7{,}2$ cm.

e Bereken het percentage Amerikaanse vrouwen in de genoemde leeftijdsgroep dat in 1972 niet lang genoeg was voor een functie bij de fabriek.

(bron: examen wiskunde A vwo 1990, eerste tijdvak)