4.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je hebt nu het onderwerp **Discrete kansmodellen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan...
Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je er mee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- stochast = toevalsvariabele — discrete stochast — kansverdeling — verwachtingswaarde — variantie — standaardafwijking
- onafhankelijke stochasten
- Bernoulli-experiment — binomiale stochast — parameters van een binomiale stochast
- hypergeometrische stochast
- poissonverdeling
- wortel-n-wet

Activiteitenlijst

- bij een discrete stochast een kansverdeling karakteriseren door verwachtingswaarde en standaardafwijking
- verwachtingswaarde en standaardafwijking van de som en het product van twee stochasten bepalen
- binomiale kansen berekenen — een binomiale kansverdeling opstellen
- kansen berekenen bij trekking zonder terugleggen — deze kansen benaderen met binomiale kansen
- kansen berekenen met de poissonverdeling
- de wortel-n-wet voor de som van n dezelfde stochasten toepassen

Achtergronden

De ‘Ars Conjectandi’ van **Jakob Bernoulli** (1654 - 1704) was één van de eerste leerboeken over kansrekening. Daarin zette Bernoulli het kansbegrip en de hele basiskansrekening helder op een rijtje. En hij voegt er zijn eigen bijdragen zoals Bernoulli-experimenten, wet van de grote aantallen, etc., aan toe. Het boek werd in 1712 gepubliceerd.

In 1718 verscheen van **Abraham de Moivre** (1667 - 1754) ‘The Doctrine of Chance’, een boek over kansrekening waarin de eerste definitie van statistische onafhankelijkheid verschijnt, naast de aanpak van allerlei problemen op het gebied van dobbelen en andere kansspelen. Hij bestudeerde ook sterftetabellen en werkte aan de theorie van de wiskunde rond levensverzekeringen.
Vanaf 1720 onderzocht De Moivre problemen zoals hieronder beschreven.

> Uit een vaas met uitsluitend zwarte en witte schijven trek je 1000 keer een schijf die je telkens teruglegt. De kans op een zwarte schijf is $\frac{1}{5}$. De verwachtingswaarde is dat je $1000 \cdot \frac{1}{5} = 200$ keer een zwarte schijf trekt. Hoe groot is nu de kans dat het aantal zwarte schijven dat je trekt maximaal 1 (of 2, of 3, of ...) van de verwachte 200 verschilt?

Dit zijn typisch problemen die een binomiale kansverdeling betreffen.
Bij de bestudering van het geval dat de kans op een zwarte en een witte schijf even groot is ontdekte De Moivre dat een bijpassende kansverdeling een histogram heeft dat netjes klokvormig is. De kansverdeling waarbij zo'n klokvormige grafiek past is later de ‘normale verdeling’ genoemd.

Testen

Opgave 1

Een verzekeringsmaatschappij legt zich toe op het verzekeren van inboedels. Uit intern onderzoek is komen vast te staan dat de maatschappij kan verwachten dat één op de 10000 verzekerden een claim van € 200000,00 zal indienen; dat één op de 1000 verzekerden een claim zal indienen van € 50000,00; dat één op de 50 een claim zal indienen van € 2500,00 en dat de andere verzekerden alleen premie zullen betalen.

a Hoeveel moet de maatschappij gemiddeld per polis uitbetalen?

De maatschappij wil op elke polis ongeveer 10% van de te verwachten uitbetaling winst maken.

Het gemiddelde verzekerde bedrag per polis is € 80000,00.

b Welke premie per € 1000,00 verzekerd bedrag moet de maatschappij vragen?

Opgave 2

Uit onderzoek blijkt dat ongeveer 46,7% van de West-Europeanen bloedgroep O heeft. Je bekijkt de gegevens van een aselecte steekproef van 50 West-Europeanen.

a Hoe groot is de kans dat in deze steekproef minstens 30 personen bloedgroep O hebben? Rond af op vier decimalen.

b Hoeveel personen met bloedgroep O verwacht je in deze steekproef? Met welke standaardafwijking? Rond indien nodig af op vier decimalen.

Je bekijkt nu de gegevens van 10 aselecte steekproeven, stuk voor stuk van 50 West-Europeanen.

c Hoeveel personen met bloedgroep O verwacht je in totaal in deze 10 steekproeven? Met welke standaardafwijking? Rond indien nodig af op vier decimalen.

d Hoeveel personen met bloedgroep O verwacht je gemiddeld per steekproef in deze 10 steekproeven? Met welke standaardafwijking? Rond indien nodig af op vier decimalen.

Opgave 3

Een tuincentrum verkoopt tulpenbollen in zakken van gemiddeld 40 stuks met een standaardafwijking van 1,5.

Een tuinman koopt 8 van deze zakken.

a Hoeveel tulpenbollen mag hij in totaal verwachten en met welke standaardafwijking? Rond indien nodig af op vier decimalen.

b Hoeveel tulpenbollen mag de tuinman per zak gemiddeld verwachten en met welke standaardafwijking? Rond indien nodig af op vier decimalen.

In een gemiddelde week gebruikt de tuinman 2 zakken tulpenbollen. Veronderstel dat hij vijf dagen per week werkt.

c Je mag ervan uitgaan dat het aantal bloembollen dat de tuinman per week gebruikt Poissonverdeeld is. Wat is de kans dat hij op een gegeven dag meer dan 20 tulpenbollen gebruikt? Rond af op vier decimalen.

Opgave 4

Bij een loterij die elke week gehouden wordt, krijgt elke deelnemer één formulier. Op dit formulier staan de getallen 1 tot en met 19. De deelnemer moet drie getallen aankruisen en vervolgens zijn formulier inleveren. Als alle formulieren ingeleverd zijn, worden aselect drie winnende getallen gekozen. Een deelnemer ontvangt een prijs als hij tenminste twee winnende getallen aangekruist heeft.

a Toon aan dat, afgerond op drie decimalen, de kans op een prijs gelijk is aan 0,051.

Het loterijbestuur neemt aan dat deze kans precies gelijk is aan 0,05. Het laat zo veel deelnemers toe dat de kans op vier of meer prijzen per week kleiner is dan 0,01.

b Hoe groot is het maximaal toelaatbare aantal deelnemers?

Opgave 5

Je werpt met twee zuivere dobbelstenen.
De stochast X is de som van de aantallen ogen die met de twee stenen gegooid worden.
De stochast Y is het product van deze aantallen.

a Welke kans is groter: $P(X = 6)$ of $P(Y = 6)$? Hoe groot zijn die kansen?

b Bereken de kans dat in 20 worpen 5 keer een totaal aan 7 ogen gegooid wordt. Rond af op vier decimalen.

Twee personen A en B maken de volgende afspraak:

- A betaalt € 3,00 aan B als Y gelijk is aan een even getal.
- A ontvangt € 9,00 van B als Y gelijk is aan een oneven getal.

c Gebruik de verwachte winst van persoon A om te beargumenteren of dat deze afspraak wel of niet eerlijk is.

d Bereken de kans dat A na 10 worpen meer geld van B ontvangen heeft dan hij aan B betaald heeft. Rond af op vier decimalen.

Opgave 6

Op de Salomonseilanden heeft ongeveer 8% van de bevolking van nature blond haar in combinatie met een donkere huidskleur. De kans dat in een aselecte steekproef van 125 Salomonseilanders zich meer dan 5 van nature blonde mensen bevinden, kun je op meerdere manieren berekenen/benaderen.

Stochast B is het aantal van nature blonde mensen in een aselecte steekproef van 125 Salomonseilanders.

a Met welke twee discrete kansmodellen kan stochast B benaderd worden?

Beargumenteer je antwoord.

b Benader de gevraagde kans op beide manieren. Rond af op vier decimalen.

Toepassen

Opgave 7: Sinterklaascadeautjes

In de laatste week voor sinterklaas staat bij de ingang van een groot winkelbedrijf een grote draaiende trommel. Daarin zitten 1000 onderling niet te onderscheiden pakjes. De Goede Sint heeft in een aantal een cadeautje ter waarde van € 1,00 gestopt. Alle andere pakjes bevatten een cadeautje van € 9,00. De totale inhoud van 1000 pakjes is telkens € 3000,00 waard. Er is een ingenieus systeem bedacht dat ervoor zorgt dat wanneer er een pakje uit de trommel genomen wordt er onmiddellijk weer een pakje met dezelfde cadeauwaarde in terugkomt.

a Je neemt één pakje. Toon aan dat de kans dat daarin een cadeautje van € 1,00 zit 0,75 is.

b Stel, je kunt dit niet aantonen. In plaats daarvan neem je 20 pakjes. De kans om hierbij 4 pakjes van € 9,00 aan te treffen is 0,1897. Wat is de kans op een pakje van € 1,00 als je één pakje neemt?

c Bereken de kans dat een greep van 20 pakjes minstens 14 met een cadeau van € 1,00 bevat.

d Bereken de kans op een pakje van € 9,00 als je twee pakjes neemt.

e Hoeveel pakjes moet je uit de mand halen, wil de kans dat één van die pakjes er een van € 9,00 is, 35,6% bedragen?

Bij de trommel staat Piet die de bezoekers aanspoort om tegen betaling van € 5,00 één pakje uit de trommel te nemen.

f Laat zien dat het winkelbedrijf op 1000 pakjes € 2000,00 winst maakt.

g Stel je voor dat je 50 pakjes koopt. Bereken de kans dat je 52% van het betaalde bedrag in de vorm van cadeautjes terugverdient.

h Bereken de kans dat de waarde van je pakjes kleiner is dan het bedrag dat je hebt betaald als je drie pakjes koopt.

Opgave 8: Pijnstillers

Van een pijnstiller is bekend dat, wanneer je er één pil van inneemt, de kans dat je binnen een half uur geen pijn meer voelt 0,6 is. Het middel wordt door 50 mensen met pijn gebruikt, ze nemen allen één pil.

a Wat is de kans dat binnen een half uur van deze 50 mensen er minstens 40 geen pijn meer voelen?

b Hoe groot is de kans dat 25 tot 45 mensen binnen een half uur geen pijn meer voelen?

Een andere fabrikant van pijnstillers maakt via een landelijke reclameactie bekend een betere pijnstiller gevonden te hebben. Deze fabrikant beweert dat de kans om binnen een half uur geen pijn meer te voelen 0,8 is. De reclamecodecommissie wil die bewering onderzoeken.
Het middel wordt daartoe aan 50 willekeurig gekozen mensen met pijn gegeven. De reclamecodecommissie besluit geen actie tegen de fabrikant te ondernemen als van de 50 mensen die het nieuwe middel kregen, er 37 binnen een half uur geen pijn meer voelen.

c Bereken de kans dat de commissie geen actie tegen de fabrikant zal ondernemen terwijl hun pijnstiller in feite helemaal niet beter is. De kans dat pijn verdwijnt dankzij dit middel, net als voor het concurrerende medicijn, is dus 0,6.

Opgave 9: Kansspelen

Gokken is ‘in’. Er bestaat tegenwoordig een grote hoeveelheid **kansspelen**. Het aanbod loopt van simpele Krasloten tot de keurige Staatsloterij en de spelen in het chique Casino. Verder kan er meegespeeld worden aan de Postcodeloterij, de Bankgiroloterij, de Duitse Lotto, etc. Allemaal mogelijkheden om in één klap binnen te zijn.

Belangrijk bij kansspelen is ‘de verwachte winst’. Om dat getal exact te bepalen moet je de kansverdeling weten. Soms kun je die beredeneren, maar je kunt ook het spel vele keren spelen en de gemiddelde winst bepalen. Dat getal is een schatting voor de verwachting. Dat vele malen spelen van een spel kun je simuleren. Je werkt dan met toevalsgetallen, getallen die volstrekt aselect uit een bepaald interval worden gekozen. Ze hebben dus alle dezelfde kans om gekozen te worden. Je weet al hoe je die met je grafische rekenmachine kunt genereren. Maar je kunt daarvoor ook een spreadsheetprogramma gebruiken.

Bekijk eerst een paar kleine kansspelen.

a Het gooispel:
Je geeft iemand € 10,00. Die ben je kwijt. Vervolgens werp je met een dobbelsteen tot je een 6 gooit. Je ontvangt € 0,00 als je meteen een 6 gooit; € 1,00 als dat bij de tweede worp lukt, € 2,00 bij de derde worp, € 4,00 bij de vierde worp, enzovoort.

b Het knipspel:
Dit keer moet je vooraf € 25,00 betalen. Daarna wordt een touwtje van 10 cm lengte volstrekt willekeurig in drie stukken geknipt. Als je met die drie stukken een scherphoekige driehoek kunt vormen dan ontvang je € 100,00. Lukt dat niet dan ontvang je niets. Het knippen kun je simuleren met toevalsgetallen.

Bekijk vervolgens één of meer van de grotere kansspelen en analyseer ze. De spelregels zijn vaak via internet te vinden. Die heb je nodig voor een goede analyse van het spel. Zie:

- **De Staatsloterij**
- **De Postcodeloterij**
- **De Lotto**
- **De Bankgiroloterij**
- **Roulette spelen**
- etc.

c Bepaal ook nu je winstkansen.

Examen

Opgave 10: Verscheidenheid van achternamen

In Engeland krijgen kinderen die uit een huwelijk worden geboren van oudsher de achternaam van de vader. Dit betekent dat in een gezin zonder trouwende zoons de achternaam niet aan een volgende generatie wordt doorgegeven. Dit kan tot gevolg hebben dat een achternaam uitsterft.
Men wil de invloed van het bovenstaande op de verscheidenheid van achternamen nagaan door middel van een computersimulatie. Omdat vooral de effecten op de langere termijn van belang zijn, besluit men te kijken naar het aantal getrouwde zoons per gezin.
Indien bijvoorbeeld Henry Streamer en Jane Woolf drie getrouwde zoons krijgen, rekent de computer in de volgende generatie verder met drie gezinnen onder de naam Streamer.
De kansen op 0, 1, 2, ... trouwende zoons ontleent men aan een uitgebreid onderzoek naar de stambomen van Engelse families. Men komt tot de conclusie dat de kans op 7 of meer trouwende zoons per gezin verwaarloosbaar klein is.
In de tabel zijn de overige kansen af te lezen. Hierbij is X het aantal trouwende zoons per gezin:

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	0,3172	0,3643	0,2093	0,0801	0,0234	0,0048	0,0009

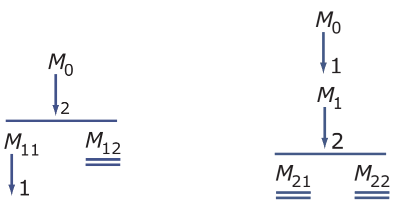
Tabel 1

Een programmeur maakt een computerprogramma waarin hij deze kansverdeling verwerkt en wel zo dat voor elk gezin de kans op bijvoorbeeld drie trouwende zoons gelijk is aan 0,0801. Men maakt verder gebruik van de onderstaande symbolen met de daarbij vermelde betekenis.

$M \downarrow x$	man M trouwt en krijgt x trouwende zoons ($1 \leq x \leq 6$).
$\underline{\underline{M}}$	man M krijgt geen trouwende zoons.

Tabel 2

In de linkerfiguur hieronder zie je dat man M_0 twee trouwende zonen krijgt: M_{11} en M_{12}; M_{11} (de oudste van de twee) krijgt één trouwende zoon en M_{12} geen trouwende zoon.



Figuur 1

a Toon aan dat de kans op het optreden van de situatie van de linkerfiguur ongeveer gelijk is aan 0,024.

b Bereken in drie decimalen nauwkeurig de kans op het optreden van de situatie van de rechterfiguur.

Neem aan dat tijdens de simulatie een zekere generatie precies twee gezinnen voorkomen met de naam 'Wendling'.

c Bereken in procenten nauwkeurig de kans dat de naam 'Wendling' in de volgende generatie als gezinsnaam verdwenen zal zijn.

d Bereken in procenten nauwkeurig de kans dat in de volgende generatie meer dan één gezin met de naam 'Wendling' voorkomt.

Als proef start men de computersimulatie met een beginpopulatie van 20 gezinnen met allemaal verschillende namen en stopt men zodra de eerstvolgende generatie gevonden is. X is het aantal namen dat in de eerstvolgende generatie niet terug komt.

e Bereken in procenten nauwkeurig de kans dat dan in de eerstvolgende generatie precies 15 verschillende gezinsnamen zullen voorkomen.

f Bereken in drie decimalen nauwkeurig de verwachtingswaarde van X.

(bron: examen wiskunde A vwo 1989, tweede tijdvak, opgave 3)