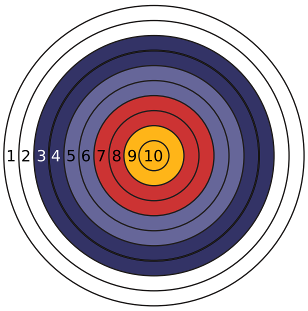
4.6 Wortel-n-wet

Inleiding

Je hebt al eerder gezien dat je een kansverdeling kunt opstellen voor het boogschieten met één pijl op deze roos. Maar meestal schiet je vaker, bijvoorbeeld 20 keer, en kijk je naar het totaal aantal punten of het gemiddelde aantal punten. En hoe zit het dan met de verwachtingswaarde en de standaardafwijking?



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- werken met een herhaling van steeds dezelfde stochast;
- regels voor de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van een herhaling van stochasten.

Voorkennis

- een kansverdeling opstellen bij een stochast;
- de regels voor de verwachtingswaarde en de standaarddeviatie van de som van twee stochasten.

Verkennen

Opgave V1

Een boogschutter schiet 20 keer op de roos (0, 1, 2, ..., 10 punten te behalen).

Zijn kansverdeling per schot is:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = x)$	0,02	0,02	0,04	0,10	0,09	0,11	0,12	0,12	0,15	0,15	0,08

Tabel 1

Je kent de regels voor de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van de som van twee stochasten.

a Hoeveel punten verwacht deze schutter in totaal te scoren? En welke standaardafwijking hoort er bij dit totaal?

b Hoeveel punten verwacht zij gemiddeld per schot te scoren? En welke standaardafwijking hoort daar bij?

Uitleg

Een boogschutter schiet 20 keer op de roos (0, 1, 2, ..., 10 punten te behalen).

Zijn kansverdeling per schot is:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = x)$	0,02	0,02	0,04	0,10	0,09	0,11	0,12	0,12	0,15	0,15	0,08

Tabel 2

De stochast X is het aantal punten dat de boogschutter behaalt met één keer schieten, stochast T is het aantal punten bij 20 herhalingen.

De verwachtingswaarde per schot is 6,22 punten met een standaardafwijking van ongeveer 2,56 punten. Omdat elk schot onafhankelijk is van het voorgaande, kun je zowel de optelregel voor verwachtingswaarden als die voor varianties toepassen:
$\text{E}(T) = \text{E}(X + X + ... + X) = \text{E}(X) + \text{E}(X) + ... + \text{E}(X) = 20 \cdot \text{E}(X)$
en $\text{Var}(T) = \text{Var}(X + X + ... + X) = \text{Var}(X) + \text{Var}(X) + ... + \text{Var}(X) = 20 \cdot \text{Var}(X)$.

Dus bij het totaal van 20 schoten is:

- de verwachtingswaarde $\text{E}(T) \approx 20 \cdot 6{,}22 = 124{,}4$ punten
- de standaardafwijking $\sigma(T) = \sqrt{20 \cdot \text{Var}(x)} = \sqrt{20 \cdot (\sigma(X))^2} = \sqrt{20} \cdot \sigma(X) \approx 11{,}45$ punten

Voor het gemiddelde aantal punten per schot deel je deze getallen door 20. De verwachtingswaarde wordt dan weer 6,22. Maar de standaardafwijking wordt ongeveer $\frac{11{,}45}{20} \approx 0{,}57$ en dus veel kleiner dan bij één schot.
Dit heet de wortel-n-wet.

Opgave 1

In de uitleg is X het aantal punten dat je per schot kunt behalen bij het boogschieten op een roos. Schiet je tien keer op die roos, dan heb je het over de stochast T.

a Controleer dat $\text{E}(X) = 6{,}22$ en $\sigma(X) \approx 2{,}56$.

b Hoeveel punten verwacht je te halen als je tien keer op die roos schiet? En met welke standaardafwijking?

c Hoeveel punten verwacht je gemiddeld per schot te halen als je tien keer op die roos schiet? Met welke standaardafwijking?

d Ligt het voor de hand dat de standaardafwijking kleiner wordt naarmate de boogschutter vaker op de roos schiet?

Opgave 2

X stelt het aantal ogen op een dobbelsteen voor.

a T stelt het aantal ogen voor als je met twee dobbelstenen werpt. Maak een kansverdeling van T en bereken $\text{E}(T)$ en $\sigma(T)$. Rond indien nodig af op twee decimalen.

b Welk verband is er tussen $\text{E}(X)$ en $\text{E}(T)$ en tussen $\sigma(X)$ en $\sigma(T)$?

c $\overline{X}$ is het gemiddelde aantal ogen per worp als je met twee dobbelstenen werpt. Bereken $\text{E}\left(\overline{X}\right)$ en $\sigma\left(\overline{X}\right)$. Rond af op twee decimalen.

d Welk verband is er tussen $\text{E}(X)$ en $\text{E}\left(\overline{X}\right)$ en tussen $\sigma(X)$ en $\sigma\left(\overline{X}\right)$?

e S stelt het aantal ogen voor als je met drie dobbelstenen werpt, en $\overline{X}$ het gemiddelde aantal ogen per worp als je met drie dobbelstenen werpt. Bereken $\text{E}(S)$, $\sigma(S)$, $\text{E}\left(\overline{X}\right)$ en $\sigma\left(\overline{X}\right)$, zonder een kansverdeling op te stellen. Rond indien nodig af op twee decimalen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Heb je te maken met n onafhankelijke gelijke kansexperimenten, elk met dezelfde stochast X, dan geldt voor de som T van deze n stochasten:

- $\text{E}(T) = n \cdot \text{E}(X)$
- $\sigma(T) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$

Voor het bewijs hiervan kun je zowel de optelregel voor verwachtingswaarden als die voor varianties toepassen:

$\text{E}(T) = \text{E}(X + X ... + X) = \text{E}(X) + \text{E}(X) + ... + \text{E}(X) = n \cdot \text{E}(X)$

$\text{Var}(T) = \text{Var}(X + X + ... + X) = \text{Var}(X) + \text{Var}(X) + ... + \text{Var}(X) = n \cdot \text{Var}(X)$

Omdat de standaardafwijking gelijk is aan de wortel van de variantie geldt dat:
$\sigma(T) = \sqrt{\text{Var}(T)} = \sqrt{n \cdot \text{Var}(X)} = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$

Je noemt deze stelling de **wortel-n-wet**.

Voor de kansverdeling die hoort bij het gemiddelde $\overline{X}$ van n onafhankelijke gelijke kansexperimenten elk met stochast X geldt daarom:

- $\text{E}\left(\overline{X}\right) = \frac{n \cdot \text{E}(X)}{n} = \text{E}(X)$
- $\sigma\left(\overline{X}\right) = \frac{\sqrt{n} \cdot \sigma(X)}{n} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Voorbeeld 1

Op doosjes paperclips van een bepaald merk staat: circa 100 stuks. Door tellingen is gebleken dat er in deze doosjes gemiddeld 104,3 paperclips zitten met een standaardafwijking van 3,5. Je haalt 10 doosjes van die paperclips. Hoeveel paperclips mag je dan in totaal verwachten en met welke standaardafwijking? En wat zijn de verwachtingswaarde en standaardafwijking van het gemiddelde aantal paperclips per doosje?

Antwoord

Neem aan dat het aantal paperclips X in elk doosje niet afhangt van het aantal in de andere doosjes. Dan geldt voor het totaal aantal paperclips T in 10 doosjes:

- $\text{E}(T) = 10 \cdot \text{E}(X) = 10 \cdot 104{,}3 = 1043$
- $\sigma(T) = \sqrt{10} \cdot \sigma(X) = \sqrt{10} \cdot 3{,}5 \approx 11{,}1$

Je verwacht daarom 1043 paperclips met een standaardafwijking van ongeveer 11,1.

Voor het gemiddelde aantal per doosje $\overline{X}$ geldt:

- $\text{E}\left(\overline{X}\right) = 104{,}3$
- $\sigma\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma(10X)}{10} = \frac{\sqrt{10} \cdot \sigma(X)}{10} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{10}} \approx 1{,}1$

Opgave 3

In een doosje paperclips zitten gemiddeld 104,3 paperclips met een standaardafwijking van 3,5. Je koopt 5 van die doosjes paperclips.

a Hoeveel paperclips T mag je in totaal verwachten in de 5 doosjes samen? Met welke standaardafwijking? Rond af op twee decimalen.

b Wat is de verwachtingswaarde en standaardafwijking van het gemiddelde aantal paperclips per doosje? Rond indien nodig af op twee decimalen.

Opgave 4

In een fabriek worden pakken met 1 kg meel gevuld. De vulmachine is afgesteld op een gemiddeld vulgewicht van 1002 gram met een standaardafwijking van 4 gram. De pakken worden op hun beurt verpakt met een plastic folie in pakketten van 10 pakken.

a Bereken het gemiddelde van het gewicht G van deze pakketten en de standaardafwijking ervan. Rond indien nodig af op twee decimalen.

b Welke verwachtingswaarde en standaardafwijking gelden voor één willekeurig pak meel uit zo'n pakket? Rond indien nodig af op twee decimalen.

Op een pallet worden 100 pakketten geplaatst.

c Welk gewicht verwacht je dat op het pallet geplaatst is en welke standaardafwijking geldt hiervoor? Rond indien nodig af op twee decimalen.

d Welke verwachtingswaarde en standaardafwijking gelden voor een pak meel dat uit een pallet genomen wordt? Rond indien nodig af op twee decimalen.

Voorbeeld 2

Voor een onderzoek wordt geteld hoeveel mannen en vrouwen er in het bestuur van studieverenigingen in Nederland zitten. Studenten kunnen meedoen met het onderzoek door te laten zien dat ze in een bestuur zitten en dan te zeggen of ze een man of vrouw zijn.

Na 500 antwoorden van studenten gekregen te hebben wordt de stochast B gemaakt voor de kansverdeling van het geslacht van een bestuurslid, waarbij $B = 0$ als het bestuurslid een man is, en $B = 1$ als het een vrouw is. Er blijkt dat $\sigma(\overline{B}) = 0{,}4899$. Verder is bekend dat er meer mannelijke bestuursleden zijn, dan vrouwelijke.

Bepaal de kansverdeling van B. Rond af op één decimaal.

Antwoord

b	0	1
$\text{P}(B = b)$	p	$1 - p$

Tabel 3

B is binomiaal verdeeld, je ziet hiernaast de kansverdeling:

Nu is $\sigma(B) = \sqrt{np(1-p)}$.

En dus geldt : $\sigma(\overline{B}) = \frac{\sqrt{np(1-p)}}{\sqrt{n}} = \sqrt{p(1-p)} = 0{,}4899$.

Deze vergelijking oplossen geeft:

$$\begin{aligned} p(1-p) &= 0{,}4899^2 \\ -p^2 + p - 0{,}4899^2 &= 0 \end{aligned}$$

Met de abc-formule vind je $p \approx 0{,}4 \vee p \approx 0{,}6$.

Omdat $p > 0{,}5$ moet gelden dat $p \approx 0{,}6$.

Opgave 5

Er zitten veel meer mannen dan vrouwen bij de brandweer. Dit wordt nader onderzocht.

De stochast B staat voor het geslacht: $B = 0$ als een persoon bij de brandweer een man is en $B = 1$ als de persoon een vrouw is.

Na een steekproef van 1000 brandweermensen is er geconstateerd dat $\sigma(\overline{B}) = 0{,}1706$.

a Stel de kansverdeling voor B op in twee decimalen nauwkeurig.
Gebruik de context om het juiste antwoord te vinden.

b Hoeveel vrouwen deden er mee met het onderzoek?

Verwerken

Opgave 6

Voor een loterij kunnen lootjes worden gekocht op rollen van 200 stuks. Een rol heeft een lengte van 12 m met een standaardafwijking van 8 mm. Een lootje is twee keer zo lang als dat die breed is.

a Welke afmetingen hebben de lootjes gemiddeld?

b Wat is de standaardafwijking van de lengte van één lootje? Rond af op vier decimalen.

Neem aan dat de standaardafwijking van de breedte van een lootje ook de helft is van die van de lengte.

c De lootjes zijn ook te koop op vellen van 10 lootjes in de breedte en 5 in de lengte. Welke standaardafwijkingen hebben de lengte en de breedte van zo'n vel? Rond af op vier decimalen.

Opgave 7

Jenna en Iris spelen een zelfbedacht spel met knikkers. Ze pakken het wetenschappelijk aan: op basis van heel vaak spelen hebben ze berekend dat de volgende kanstabel bij het spel hoort:

k	-2	-1	0	2	3
$\mathrm{P}(K = k)$	0,0032	0,1634	0,3456	0,2473	0,2405

Tabel 4

Stochast K is het aantal knikkers winst/verlies per keer dat het spel gespeeld wordt.

a Hoe groot is het verwachte aantal knikkers winst/verlies na 35 keer spelen? Welke standaardafwijking hoort daarbij? Rond af op twee decimalen.

b Hoeveel bedraagt het gemiddelde aantal knikkers per spel dat je verwacht na 35 keer spelen?

Geef ook de bijbehorende standaardafwijking. Rond af op twee decimalen.

Opgave 8

In een doos zitten vijf balletjes met daarop de getallen 2, 3, 5, 7 en 12.

a Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking voor het getal dat je krijgt bij het aselect trekken van één balletje. Rond af op twee decimalen.

b Je trekt twee balletjes met teruglegging. Bepaal van de gemiddelden van de tweetallen de verwachtingswaarde en de standaardafwijking. Rond indien nodig af op twee decimalen.

c Welk verband bestaat er tussen de verwachtingswaarden die je bij a en b hebt berekend?

d Laat zien dat je de standaardafwijking bij b ook had kunnen vinden door de standaardafwijking van a te delen door $\sqrt{2}$.

e In een andere doos zitten vijf balletjes met daarop de getallen 4, 6, 10, 14 en 24. Hieruit trek je ook twee balletjes met teruglegging.

Bepaal het gemiddelde H van de getalcombinaties. Bepaal $\mathrm{E}(H)$ en $\sigma(H)$, zonder een kansverdeling op te stellen. Rond af op twee decimalen.

Opgave 9

Een bepaald type dvd-recorder wordt in dozen verpakt die een gemiddelde hoogte van 10 cm hebben met een standaardafwijking van 4 mm. Bij een groothandel wordt een aantal van deze dozen in een magazijn opgeslagen.

a Er worden 15 dozen op elkaar geplaatst. Bereken de verwachtingswaarde van de hoogte van de stapel dozen en geef de bijbehorende standaardafwijking. Rond af op twee decimalen.

b Bij het vervoer van deze dozen gebruikt men een vrachtwagen met een hoogte van 2,5 m en een standaardafwijking van 1,9 cm. Bij het beladen van deze vrachtwagen maakt men stapels van n dozen. De dozen hebben weer een gemiddelde hoogte van 10 cm maar een standaardafwijking van 0,38 cm. Hoeveel dozen mogen er maximaal op elkaar gestapeld worden?

Opgave 10

Een marktkoopman slaat een lading van 600 appels in, om later te verkopen. De ervaring leert dat 8% van de appels uiteindelijk niet te verkopen is, om wat voor reden dan ook.

a Op een dag legt de koopman 100 appels voor de verkoop neer. Neem aan dat er genoeg vraag naar is. Wat is de kans dat de koopman minder dan 85 appels kan verkopen? Rond af op vier decimalen.

b Hoeveel appels mag de man verwachten dat hij die dag verkoopt? Met welke standaardafwijking? Rond zo nodig af op twee decimalen.

c Hoeveel appels verwacht de koopman dat uiteindelijk van zijn totale hoeveelheid verkocht kunnen worden? Met welke standaardafwijking moet hij rekening houden?

Opgave 11

Jochem voert een onderzoek uit naar de leeftijd van mensen met een vaste telefoonverbinding.

Hij maakt een binomiale stochast X bij het hebben van een vaste telefoon. Hierbij is $X = 0$ als de persoon jonger dan 50 jaar is, en $X = 1$ als de persoon 50 jaar of ouder is. Na een enquête onder 500 mensen met een vaste telefoon en wat rekenwerk, komt hij op $\sigma\left(\overline{X}\right) = 0{,}0179$.

Bereken de kans dat een willekeurige persoon met een vaste telefoon 50 jaar of ouder is. Rond af op één decimaal. Als het goed is krijg je twee antwoorden: beredeneer uit de context welke de juiste is.

Toepassen

Opgave 12: Draaiwielen op de kermis

Op de kermis staan twee (zuivere) draaiwielen. Het ene draaiwiel is in drie even grote sectoren verdeeld met daarop de nummers 1, 2 en 3. Het andere draaiwiel is in twee even grote sectoren verdeeld met daarop de nummers 10 en 20. De regels zijn als volgt.

- Als je € 2,50 inzet, krijgen beide draaiwielen een zet.
- Je krijgt niets als het eerste draaiwiel bij nummer 1 stopt.
- Je krijgt € 6,00 als beide draaiwielen op hun hoogste nummer stoppen.
- Je krijgt € 3,00 bij elke andere combinatie van de nummers.

Mila doet 12 keer mee. Ze verdient hiermee € 5,50.

Bereken hoeveel standaardafwijkingen dit bedrag afwijkt van de verwachte winst na 12 keer spelen. Beargumenteer hiermee of haar winst wel of niet uitzonderlijk hoog is.

Opgave 13: Leeftijdsverdeling

Manon heeft bij een bijeenkomst van een vereniging met 500 leden aan de leden de leeftijd gevraagd. De stochast X kan de volgende waarden aannemen:

$X = 0$ als de ondervraagde persoon jonger dan 40 jaar is, $X = 1$ als de persoon tussen de 40 en 60 jaar is en $X = 2$ als de persoon 60 jaar of ouder is.

Manon heeft berekend dat $\text{E}\left(\overline{X}\right) = 1{,}7$ en $\text{Var}\left(\overline{X}\right) = 0{,}00062$.

Stel de kansverdeling op voor X.

Testen

Opgave 14

In een doos zitten vier kaartjes met daarop de getallen 3, 7, 11 en 15.

a Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking voor het getal bij het trekken van één kaartje uit de doos.

b Bereken vanuit de bijbehorende kansverdeling de verwachtingswaarde van de som van de getallen van twee getrokken kaartjes bij trekken met terugleggen. Bereken voor deze som ook de standaardafwijking.

c Welk verband bestaat er met de verwachtingswaarde en de standaardafwijking die je bij a hebt berekend?

d Bereken vanuit de bijbehorende kansverdeling de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het gemiddelde van de getallen op twee getrokken kaartjes. Welk verband bestaat er nu met de verwachtingswaarde en de standaardafwijking die je bij a hebt berekend?

e Trek met teruglegging drie kaartjes uit de doos. Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van de som en van het gemiddelde van de getallen op de drie getrokken kaartjes.

Opgave 15

In de maand december zijn er kerstzegels verkrijgbaar. Ze worden in een bepaald jaar aangeboden op een velletje van vier bij vijf zegels. De afmetingen van de velletjes (zonder rand) zijn 15,5 bij 15,5 cm met een standaardafwijking van 0,75 mm in beide richtingen.

Bereken de afmetingen en de standaardafwijkingen van deze zegels.

Figuur 2

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@xs4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.