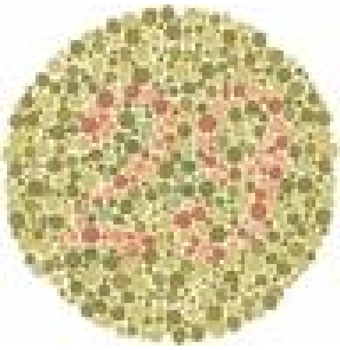
4.3 Binomiale stochasten

Inleiding

Plaatjes zoals dit worden gebruikt om te onderzoeken of iemand kleurenblind is. Kleurenblindheid komt voor bij 8% van de westerse mannen en 0,4% van de westerse vrouwen. Via de website **www.kleurenblindheid.nl** kun je er meer over te weten komen. Of iemand kleurenblind is kun je niet aan zijn uiterlijk zien, dus je kunt je bijvoorbeeld afvragen hoe groot de kans is dat er kleurenblinden in jouw klas zitten. En hoeveel je er dan verwacht...



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip Bernoulli-experiment;
- binomiale stochasten en de bijbehorende kansverdelingen opstellen;
- rekenen met binomiale kansen;
- regels voor de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van een binomiale stochast.

Voorkennis

- kansverdelingen opstellen bij stochasten;
- verwachtingswaarde en standaardafwijking bij een kansverdeling berekenen;
- de regels voor de verwachtingswaarde en de standaarddeviatie van de som van meerdere stochasten.

Verkennen

Opgave V1

Lees de tekst van de Inleiding nog eens.

a Hoe groot is de kans dat in een klas van de 10 jongens er 2 kleurenblind zijn?

b Hoe groot is de kans dat in een klas van 10 jongens en 15 meisjes 2 leerlingen kleurenblind zijn?

c Hoeveel kleurenblinden verwacht je in zo'n klas?

Uitleg

Kleurenblindheid komt voor bij 8% van de westerse mannen. Of iemand kleurenblind is kun je niet aan zijn uiterlijk zien, dus iedere westerse man die je tegenkomt (en verder niet kent) heeft voor jou een kans van 0,08 om kleurenblind te zijn. Vraag je een willekeurige westerse man of hij kleurenblind is of niet, dan doe je een kansexperiment met precies twee uitkomsten: 0 als hij niet kleurenblind is en 1 als dit wel het geval is.
Zo'n kansexperiment heet een Bernoulli-experiment naar de Zwitserse wiskundige **Jakob Bernoulli (1654—1705)**.
De bijbehorende kansverdeling is:

x	0	1
$\text{P}(X = x)$	0,92	0,08

Tabel 1

Vraag je 10 westerse mannen naar kleurenblindheid dan voer je het Bernoulli-experiment 10 keer uit: je herhaalt 10 keer hetzelfde experiment. De bijbehorende stochast is $K = 10X$ en de kans dat er 2 kleurenblinden bij zijn is:

$P(K = 2) = 0{,}08^2 \cdot 0{,}92^8 \cdot \binom{10}{2}$

waarin $\binom{10}{2}$ het aantal mogelijke combinaties van 2 uit 10 voorstelt.

Dit getal is het aantal mogelijke takken in de bijbehorende kansboom van 10 lagen met 2 kleurenblinden en 8 niet-kleurenblinden.

Een complete kansverdeling van K ziet er zo uit:

- $P(K = 0) = 0{,}08^0 \cdot 0{,}92^{10} \cdot \binom{10}{0}$
- $P(K = 1) = 0{,}08^1 \cdot 0{,}92^9 \cdot \binom{10}{1}$
- $P(K = 2) = 0{,}08^2 \cdot 0{,}92^8 \cdot \binom{10}{2}$
- ...
- $P(K = 10) = 0{,}08^{10} \cdot 0{,}92^0 \cdot \binom{10}{10}$

Bij deze kansverdeling kun je eenvoudig de verwachting en de standaarddeviatie berekenen, bijvoorbeeld zo:

$E(K) = E(10X) = 10 \cdot E(X) = 10 \cdot 0{,}08 = 0{,}8$

en

$\sigma(K) = \sigma(10X) = \sqrt{10} \cdot \sigma(X) \approx \sqrt{10} \cdot 0{,}27 \approx 0{,}86$.

Opgave 1

Bekijk de stochast X in de **Uitleg**.

a Laat zien, dat $E(X) = 0{,}08$ en $\sigma(X) \approx 0{,}86$.

b Nu is $K = 10X$. Leg uit waarom K de som van 10 onafhankelijke Bernoulli-experimenten is.

c Bereken $P(K = 4)$.

Opgave 2

Je werpt met twee dobbelstenen en bepaalt na de worp de som van het aantal bovenliggende ogen. De stochast X geeft aan of het aantal ogen zeven is of niet:

- $X = 0$ betekent dat je geen zeven ogen gooit.
- $X = 1$ betekent dat je zeven ogen gooit.

a Stel een kansverdeling voor X op.

b Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van X exact.

Je gooit nu twaalf keer met twee dobbelstenen. Je let op het aantal keren A dat je zeven ogen gooit.

c Hoe groot is de kans dat je drie keer zeven ogen gooit, dus hoe groot is $P(A = 3)$?

d Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van A. Rond zo nodig af op vier decimalen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **Bernoulli-experiment** is een kansexperiment met precies twee uitkomsten: ‘succes’ of ‘mislukking’. Daarbij hoort een stochast B die de waarden 0 en 1 heeft. Je kunt er daarom de volgende kansverdeling bij opstellen:

b	0	1
$\text{P}(B = b)$	$1 - p$	p

Tabel 2

Als je een Bernoulli-experiment n keer herhaalt en stochast X stelt het aantal successen daarbij voor, dan heeft X een **binomiale kansverdeling**. Een binomiaal kansexperiment bestaat dus uit n gelijke onafhankelijke experimenten met elk precies twee uitkomsten.

De kans op k successen is $\text{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$. Ook nu is p de kans op succes en verder is $0 \leq k \leq n$.

De variabelen n en p noem je de **parameters** van de binomiale verdeling.

Als bijvoorbeeld $n = 8$ en $p = 0{,}3$ dan noteer je ook wel voor de kans op k successen:
$\text{P}(X = k | n = 8 \text{ en } p = 0{,}3)$

Voor een binomiaal verdeelde stochast met parameters n en p geldt dat

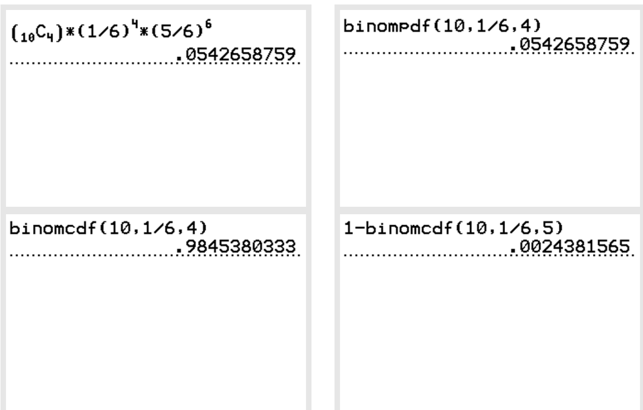
- de **verwachtingswaarde** is: $\text{E}(X) = n \cdot p$
- de **variantie** is: $\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$
- de **standaardafwijking** is: $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Voorbeeld 1

Je gooit met tien dobbelstenen.

- Hoe groot is de kans dat er 4 zessen boven komen te liggen?
- Hoe groot is de kans dat er hoogstens 4 zessen boven komen te liggen?
- Hoe groot is de kans dat er minstens 6 zessen boven komen te liggen?

Antwoord



Figuur 2

Het aantal zessen dat boven komt, is een binomiale stochast X met parameters $n = 10$ en $p = \frac{1}{6}$.

De eerste gevraagde kans is: $\text{P}\left(X = 4 | n = 10 \text{ en } p = \frac{1}{6}\right)$.

Je kunt deze kans zelf berekenen:

$P\left(X = 4|n = 10 \text{ en } p = \frac{1}{6}\right) =$

$= \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0{,}0543$

De grafische rekenmachine kan deze kans ook in één keer voor je berekenen, zie het **Practicum**.

De grafische rekenmachine is zeker handig als je de kans op hoogstens 4 zessen wilt weten. Want in plaats van de kansen voor $X = 0{,}1{,}2{,}3$ en 4 afzonderlijk te berekenen en dan op te tellen, kan de grafische rekenmachine dit in één keer. Je gebruikt dan de cumulatieve binomiale verdeling.

De kans op hoogstens 4 zessen is:

$P\left(X \leq 4|n = 10 \text{ en } p = \frac{1}{6}\right) \approx 0{,}9845$

De kans op minstens 6 zessen is:

$P\left(X \geq 6|n = 10 \text{ en } p = \frac{1}{6}\right) = 1 - P(X \leq 5) \approx 0{,}0024$

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** wordt met tien dobbelstenen geworpen en let je op het aantal zessen X dat boven komt.

a Waarom is X een binomiale stochast?

b Bereken $P(X = 6)$. Bereken deze kans met de hand en met behulp van de grafische rekenmachine. Rond af op vier decimalen.

c Bereken de kans dat er hoogstens 6 zessen boven komen te liggen. Rond af op vier decimalen.

d Bereken de kans dat er minstens 4 zessen boven komen te liggen. Rond af op vier decimalen.

Opgave 4

Er wordt 30 keer met een zuivere dobbelsteen gegooid. Bereken in vier decimalen de kans dat er:

a precies 5 keer een zes wordt geworpen;

b bij alle worpen een oneven aantal ogen boven komt;

c bij hoogstens 10 worpen een 1 of 2 boven komt.

Opgave 5

Neem aan dat stochast X binomiaal verdeeld is. Bepaal de volgende kansen in vier decimalen.

a $P(X \leq 8|n = 15 \text{ en } p = 0{,}15)$

b $P(X < 9|n = 55 \text{ en } p = 0{,}35)$

c $P(42 \leq X \leq 54|n = 100 \text{ en } p = 0{,}45)$

d $P\left(X \leq 2 \text{ of } X \geq 5|n = 8 \text{ en } p = \frac{1}{3}\right)$

e $P(X \geq 10|n = 16 \text{ en } p = 0{,}005)$

Voorbeeld 2

Je gooit met 10 dobbelstenen. Stochast X geeft het aantal zessen aan dat boven komt te liggen. Stel een kansverdeling op voor X en bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking.

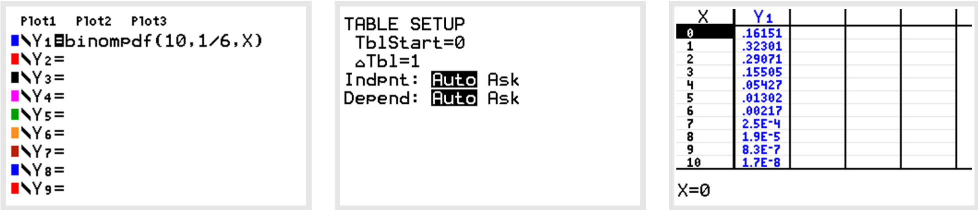
Antwoord

X is een binomiale stochast met parameters $n = 10$ en $p = \frac{1}{6}$.

Bepaal nu de kansen voor $X = 0{,}1{,}2{,}3{,}...{,}10$.

Het gaat om kansen van de vorm $P\left(X = x|n = 10 \text{ en } p = \frac{1}{6}\right)$.

Voer dit op de grafische rekenmachine als functie in, dan maakt de grafische rekenmachine de kansverdeling voor je. Zie het **Practicum**.



Figuur 3

De verwachtingswaarde is $\text{E}(X) = n \cdot p = 10 \cdot \frac{1}{6} = 1\frac{2}{3}$ zessen.

De standaardafwijking is $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 1{,}18$ zessen.

Opgave 6

Je gooit met 12 dobbelstenen. Stochast X geeft het aantal dobbelstenen dat met twee ogen of minder boven komt te liggen.

a Hoe stel je een kansverdeling op voor X?

b Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van stochast X. Rond indien nodig af op vier decimalen.

Opgave 7

Erwin is een ervaren boogschutter, die één op de vier keer in de roos schiet. Bij een wedstrijd schiet Erwin vijf keer op een doelwit. Voor ieder schot in de roos krijgt hij 10 punten, voor elk ander schot krijgt hij 0 punten.

a Stel een kansverdeling op voor het aantal punten dat Erwin kan halen. Rond af op vier decimalen.

b Bereken de verwachtingswaarde en standaardafwijking van het aantal punten dat Erwin kan halen exact.

Opgave 8

Bepaal telkens de juiste waarde(n) van a. Rond indien nodig af op drie decimalen.

a $\text{P}(X = 3 | n = a \text{ en } p = 0{,}25) < 0{,}25$

b $\text{P}(X \geq a | n = 7 \text{ en } p = 0{,}30) > 0{,}20$

c $\text{P}(X = 5 | n = 17 \text{ en } p = a) < 0{,}20$

Voorbeeld 3

Uit onderzoek blijkt dat 8% van de westerse mannen kleurenblind is. Je vraagt vijftig willekeurig gekozen westerse mannen of ze kleurenblind zijn. Hoeveel kleurenblinde mannen verwacht je in je steekproef aan te treffen? Hoe groot is de kans dat je meer dan vier kleurenblinde mannen in je steekproef aantreft?

Antwoord

Stel stochast K is het aantal kleurenblinde mannen in de steekproef. K kun je opvatten als een binomiaal verdeelde stochast met parameters $n = 50$ en $p = 0{,}08$.

De verwachtingswaarde is: $\text{E}(K) = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}08 = 4$ mannen. De standaardafwijking is: $\sigma(K) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{50 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92} \approx 1{,}9$ mannen.

De kans op $X > 4$ kun je zo opschrijven: $\text{P}(K > 4 | n = 50 \text{ en } p = 0{,}08)$. Deze kans is gelijk aan: $1 - \text{P}(K \leq 4 | n = 50 \text{ en } p = 0{,}08) \approx 0{,}3710$.

De grafische rekenmachine kan die kans snel voor je berekenen.

Opgave 9

In **Voorbeeld 3** worden kansen berekend dat er in een groep van 50 mannen een bepaald aantal kleurenblind is. Rond de volgende kansen steeds af op vier decimalen.

a Bereken de kans op precies 6 kleurenblinden in de groep van 50.

b Bereken de kans op minstens 6 kleurenblinden in de groep van 50.

c Bereken de kans op minstens 6 en hooguit 9 kleurenblinden in de groep van 50.

Opgave 10

Een aantal mensen wordt ieder jaar ingeënt tegen griep. Van een bepaalde entstof weet men dat acht van de tien mensen geen griep krijgen. Een huisarts vaccineert vier patiënten A, B, C en D met deze entstof.

a Hoeveel patiënten zullen naar verwachting geen griep krijgen?

b Bepaal de kans dat hooguit één van de vier patiënten griep krijgt.

c Bepaal de kans dat de patiënten A en B geen griep krijgen en C en D wel.

d Bepaal de kans dat twee van de vier patiënten griep krijgen. Hoe had je dat makkelijk uit c kunnen afleiden?

Verwerken

Opgave 11

Neem aan dat stochast X binomiaal verdeeld is. Bepaal de volgende kansen in vier decimalen.

a $\text{P}(X \leq 6 | n = 20 \text{ en } p = 0{,}45)$

b $\text{P}(X > 8 | n = 15 \text{ en } p = 0{,}35)$

c $\text{P}(X \geq 46 | n = 50 \text{ en } p = 0{,}55)$

d $\text{P}(X \leq 5 | n = 25 \text{ en } p = 0{,}25)$

e $\text{P}(X < 16 | n = 30 \text{ en } p = 0{,}45)$

Opgave 12

Je gooit met vijf viervlaksdobbelstenen. Stochast X geeft het aantal vieren aan dat boven komt te liggen.

a Stel de kansverdeling op voor X. Rond de kansen af op vier decimalen.

b Bereken $\text{E}(X)$ en $\sigma(X)$. Rond indien nodig af op twee decimalen.

Opgave 13

X is een binomiaal verdeelde toevalsvariabele. Bepaal telkens de juiste waarde van x. Rond indien nodig af op twee decimalen.

a $\text{P}(X \leq x | n = 100 \text{ en } p = 0{,}35) \approx 0{,}1236$

b $\text{P}(X \leq x | n = 18 \text{ en } p = 0{,}45) < 0{,}7473$

c $\text{P}\left(X > x | n = 12 \text{ en } p = \frac{1}{3}\right) < 0{,}1777$

d $\text{P}(X \leq 3 | n = 15 \text{ en } p = x) > 0{,}2$

e $\text{P}(X \geq 10 | n = 50 \text{ en } p = x) < 0{,}2$

Opgave 14

Een volledig kaartspel bestaat uit 52 kaarten, van elke kleur (ruiten, harten, klaveren en schoppen) evenveel. Uit zo'n kaartspel wordt zes keer een kaart getrokken: er wordt gekeken of het een hartenkaart is of niet. De kaart die je trekt, wordt steeds in het spel teruggestopt alvorens een nieuwe kaart te nemen. Het spel kaarten wordt voor iedere trekking geschud.

a Waarom is hier sprake van een binomiaal kansmodel?

b Hoe groot is de kans op hoogstens drie hartenkaarten? Geef je antwoord in vier decimalen.

c Hoe groot is de kans dat je meer dan drie hartenkaarten trekt? Geef je antwoord in vier decimalen.

d Waarom is er geen sprake van een binomiaal kansmodel als je de getrokken kaarten niet teruglegt?

Opgave 15

Van een grote populatie is bekend dat 35% een bepaalde eigenschap heeft. Uit deze populatie wordt heel erg vaak een willekeurige groep van 100 mensen gekozen. Gemiddeld wordt er in ongeveer 12% van die steekproeven x of minder mensen met die eigenschap aangetroffen.

a Hoe groot is x?

Van een andere populatie is bekend dat een zesde deel een bepaalde eigenschap heeft. Uit deze populatie wordt een steekproef getrokken. De kans dat in deze steekproef hoogstens drie mensen worden aangetroffen met die eigenschap is ongeveer 0,768.

b Bepaal de grootte van de steekproef.

Opgave 16

Van een binomiaal verdeelde stochast X weet je dat de verwachtingswaarde $2\frac{2}{3}$ is. De standaardafwijking is $1\frac{1}{3}$.

Bereken $\text{P}(X = 4)$. Rond af op vier decimalen.

Toepassen

Opgave 17: Meerkeuzetoets

Een meerkeuzetoets bestaat uit 50 vragen, elk met vier mogelijke antwoorden, waarvan er slechts één juist is.

De docente die deze toets heeft gemaakt wil de normering ervan vaststellen. De cijfers worden tot op één decimaal nauwkeurig berekend; het laagst mogelijke cijfer is 1,0 en het hoogst mogelijke 10,0. Zij wil bij het vaststellen van het cijfer het gokken van antwoorden zo min mogelijk belonen.

a Ze zou er daartoe voor kunnen kiezen om het aantal verwachte goede antwoorden bij zuiver gokken niet te belonen. Verder werkt ze met een vast aantal punten per vraag.

Welke normering zou ze dan het best kunnen hanteren?

b Zij kan ook besluiten dat bij willekeurig invullen de kans op het cijfer 4,0 of hoger bij benadering niet meer dan 3% mag zijn. Voor hoeveel goede antwoorden wordt dan het cijfer 4,0 gegeven?

Ga er nu van uit dat er een zuiver lineaire puntenverdeling wordt gehanteerd:

- bij 0 tot 5 vragen goed krijg je een 1,0;
- bij 6 vragen goed krijg je een 1,2;
- bij 7 vragen goed krijg je een 1,4;
- ...
- bij 50 vragen goed een 10,0.

c Je weet op 30 vragen het goede antwoord en besluit de rest van de vragen op goed geluk in te vullen. Welk cijfer kun je verwachten?

d Bereken, in de situatie bij c, de kans dat je een 7,6 of meer scoort. Rond af op vier decimalen nauwkeurig.

e Bij n zeker goede antwoorden en de overige vragen willekeurig invullen is de kans op minstens 7,0 groter dan 90%. Bereken n.

Opgave 18: Geometrische kansverdeling

Als je een Bernoulli-experiment n keer herhaalt en stochast X stelt het aantal successen daarbij voor, dan heeft X een binomiale kansverdeling. Je kunt ook een Bernoulli-experiment net zo vaak uitvoeren totdat je één keer succes hebt. Hoe vaak je dan het experiment moet uitvoeren is afwachten. De bijbehorende stochast heeft dan een geometrische verdeling. In deze opgave zie je daar een voorbeeld van.

Bij het spel 'Mens erger je niet' moet je eerst met een dobbelsteen een zes hebben gegooid, voordat je een pion op het speelveld mag plaatsen.

Stochast X stelt het aantal keren gooien voordat je een pion op het speelveld mag plaatsen voor.

a Bereken $\text{P}(X = 5)$. Rond af op vier decimalen.

b Toon aan dat $\text{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$.

c Toon aan dat $\frac{1}{6} \cdot \text{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$.

d Bereken de verwachtingswaarde van X.

Testen

Opgave 19

Je werpt 10 keer met een zuiver geldstuk. Stochast K geeft het aantal keren kruis bij deze worpen.

a Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van stochast K.

Stochast L geeft het aantal keren kruis als je 1000 keer gooit.

b Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van L.

Opgave 20

Een test bestaat uit 15 vierkeuzevragen. Slechts bij 5 van deze vragen kun je met zekerheid het goede antwoord aangeven. Je besluit de 10 andere vragen op goed geluk een antwoord aan te geven.

a Hoe groot is de kans dat je 12 vragen van de test het goede antwoord hebt gegeven?

b Hoe groot is de kans dat je meer dan 5 vragen goed beantwoordt?

c Hoeveel vragen van de test mag je verwachten goed te beantwoorden?

Opgave 21

In het casino mag je voor € 10,00 met tien zuivere dobbelstenen werpen. Voor iedere dobbelsteen waar je minder dan 4 ogen mee gooit krijg je € 2,00 uitbetaald.

Hoe groot is de kans dat je winst maakt bij dit spel?

Practicum

Met de volgende practica kun je **het werken met kansverdelingen op de grafische rekenmachine** doornemen. Vooralsnog heb je alleen de binomiale kansverdeling nodig, alleen de eerste drie onderdelen van het gewenste practicum.

- **Kansverdelingen met de TI84**
- **Kansverdelingen met de TInspire**
- **Kansverdelingen met de Casio fx-CG50**
- **Kansverdelingen met de HP-prime**
- **Kansverdelingen met de NumWorks**

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.