4.2 Stochasten optellen

Inleiding

Bij het spel 'darts' is het aantal punten dat je scoort bij het werpen met een pijltje een stochast. Met behulp van statistieken kun je voor een speler een bijpassende kansverdeling maken. Maar in het spel gooi je per beurt met drie darts. Hoe kun je de kansverdeling voor een beurt opstellen vanuit de kansverdeling voor één worp? Op deze manier winstkansen berekenen is nog heel ingewikkeld, want het spel gaat om gewonnen 'sets', waarbij elke set weer bestaat uit 'legs' die elk uit een vooraf onbekend aantal beurten bestaan. Zoek de spelregels maar eens op.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- >kansverdelingen opstellen voor de som van twee of meer stochasten;
- regels voor de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van de som van stochasten.

Voorkennis

- kansverdelingen opstellen bij een stochast;
- verwachtingswaarde en standaardafwijking bij een kansverdeling berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Gooi je met een dobbelsteen dan is het aantal ogen dat bovenkomt een stochast X. Gooi je met twee dobbelstenen, dan heb je voor de som van het aantal ogen dat bovenkomt te maken met een stochast $Y = X + X = 2X$. Je hebt al in de voorbeelden van de voorgaande paragraaf de bijbehorende kansverdelingen gemaakt.

a Laat zien dat in dit geval $\text{E}(2X) = 2 \cdot \text{E}(X)$, dat $\text{Var}(2X) = 2 \cdot \text{Var}(X)$ en dat $\sigma(2X) = \sqrt{2} \cdot \sigma(X)$.

Iemand ontwerpt een dobbelstenensimulator die je via internet kunt spelen. Alleen zorgt hij er voor (maar dat is niet zichtbaar) dat de tweede dobbelsteen altijd precies 1 oog meer aangeeft dan de eerste, behalve als de eerste 6 ogen heeft, dan heeft de tweede 1 oog. Noem nu X het aantal ogen op de eerste dobbelsteen en Y dat op de tweede.

b Stel een kansverdeling op voor $X + Y$ en onderzoek hoe het zit met $\text{E}(X + Y)$ en $\sigma(X + Y)$.

Uitleg

Iemand speelt een spel waarbij de eindscore wordt berekend door de scores van twee afzonderlijke kansspellen bij elkaar op te tellen. Bij het eerste spel kan hij 2, 4 of 6 punten verdienen, bij het tweede spel 0 of 10 punten. X is de stochast voor het aantal punten bij het eerste spel en Y die voor het tweede spel. Op grond van voorgaande resultaten heeft hij deze kansverdelingen opgesteld:

x	2	4	6
$\text{P}(X = x)$	0,20	0,30	0,50

y	0	10
$\text{P}(Y = y)$	0,40	0,60

Tabel 1

Ga ervan uit dat de uitkomst van het eerste spel geen invloed heeft op de uitkomst van het tweede spel. Dit betekent dat X en Y onafhankelijke stochasten zijn.

Bij de eindscore past dan deze kansverdeling:

$x+y$	2	4	6	12	14	16
$\text{P}(X+Y=x+y)$	0,08	0,12	0,20	0,12	0,18	0,30

Tabel 2

Je kunt nu zelf nagaan dat $\text{E}(X)=4{,}6$ en $\text{E}(Y)=6$ en $\text{E}(X+Y)=10{,}6$.

Hier geldt dus dat de verwachtingswaarde van $X+Y$ gelijk is aan de som van de afzonderlijke verwachtingswaarden.

Ook kun je nagaan dat $\text{Var}(X)=2{,}44$ en $\text{Var}(Y)=24$ en $\text{Var}(X+Y)=26{,}44$.

Ook de variantie van $X+Y$ is gelijk aan de som van de afzonderlijke varianties.
Omdat $(\sigma(X))^2 = \text{Var}(X)$ moet gelden $(\sigma(X+Y))^2 = \sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2$. En dus $\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma(X)^2+\sigma(Y)^2}$.

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt het verband besproken tussen de verwachtingswaarden en de standaardafwijkingen van X, Y en $X+Y$.

a Bereken zelf de verwachtingswaarden van X, Y en $X+Y$ en ga na dat $\text{E}(X+Y)=\text{E}(X)+\text{E}(Y)$.

b Bereken zelf de standaardafwijkingen van X, Y en $X+Y$ en ga na dat $\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma(X)^2+\sigma(Y)^2}$.

c Waarom wordt deze manier van optellen van standaardafwijkingen wel ‘pythagorisch optellen’ genoemd?

Opgave 2

Iemand gooit twee keer een muntje op, en wil een kansverdeling opstellen voor het aantal keren dat hij kop gooit. Noem X de waarde van de eerste toss en Y die van de tweede, met $X=Y=1$ als er kop wordt gegooid en $X=Y=0$ bij munt.

a Stel de kansverdelingen op voor X, Y en $X+Y$.

b Bereken de standaardafwijkingen van X, Y en $X+Y$ en controleer dat $\sigma(X+Y)=\sqrt{(\sigma(X))^2+(\sigma(Y))^2}$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Vaak heb je met de som van een aantal stochasten te maken. Zo kun je vanuit een kansverdeling voor stochast X met waarden x_1, x_2, ..., x_n en een kansverdeling voor stochast Y met waarden y_1, y_2, ..., y_n ook een kansverdeling maken voor $X+Y$ door kansen te berekenen bij alle waarden x_i+y_j.

Je hebt te maken met **onafhankelijke stochasten** als $\text{P}\left(X=x_i \text{ en } Y=y_j\right)=\text{P}(X=x_i)\cdot\text{P}\left(Y=y_j\right)$ voor elke x_i en elke y_j.

Er geldt: $\text{E}(X+Y)=\text{E}(X)+\text{E}(Y)$

Ook geldt als X en Y onafhankelijk zijn:

$\text{Var}(X+Y)=\text{Var}(X)+\text{Var}(Y)$

Omdat $(\sigma(X))^2=\text{Var}(X)$ geldt voor onafhankelijke stochasten X en Y:

$(\sigma(X+Y))^2=(\sigma(X))^2+(\sigma(Y))^2$

En dus geldt voor onafhankelijke stochasten X en Y:

$\sigma(X+Y)=\sqrt{(\sigma(X))^2+(\sigma(Y))^2}$

Voorbeeld 1

Voor boogschutter A is stochast X het aantal punten dat hij bij elk schot behaalt.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = x)$	0,02	0,02	0,04	0,10	0,09	0,11	0,12	0,12	0,15	0,15	0,08

Tabel 3

Voor boogschutter B is stochast Y het aantal punten dat hij bij elk schot behaalt.

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(Y = y)$	0,01	0,02	0,03	0,03	0,04	0,06	0,05	0,11	0,20	0,21	0,24

Tabel 4

Beide boogschutters vormen een team en hun scores worden opgeteld. Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van $X + Y$.

Antwoord

Beide stochasten zijn onafhankelijk.

$E(X) = 6{,}22$ en $Var(X) = (\sigma(X))^2 = 6{,}5316$

Verder $E(Y) = 7{,}59$ en $Var(Y) = (\sigma(Y))^2 = 5{,}9419$.

Dan is $E(X + Y) = 6{,}22 + 7{,}59 = 13{,}81$ en $\sigma(X + Y) = \sqrt{6{,}5316 + 5{,}9419} \approx 3{,}53$.

Opgave 3

Bekijk in **Voorbeeld 1** de kansverdelingen voor de twee boogschutters.

a Controleer de berekende verwachtingswaarden en standaardafwijkingen.

b Bereken de kans dat beide schutters samen één punt scoren.

c Het maken van de kansverdeling voor $X + Y$ is een tijdrovende bezigheid. Welke waarden kan $X + Y$ aannemen?

d Bereken $P(X + Y = 2)$.

Opgave 4

Anneke en Bas doen een behendigheidsspelletje waarbij ze ofwel hun inleg van € 1,00 kwijt zijn, ofwel de inleg plus € 5,00 terugkrijgen. A is de winst van Anneke en B de winst van Bas. In de tabel staan de kansverdelingen van hun winst.

a	-1	5		b	-1	5
$P(A = a)$	0,6	0,4		$P(B = b)$	0,7	0,3

Tabel 5

De uitkomsten van A en B zijn onafhankelijk.

a Bereken exact de verwachtingswaarden en standaardafwijkingen van A en B.

b Bereken exact $E(A + B)$ en $\sigma(A + B)$ met behulp van de antwoorden uit a.

c Stel de kansverdeling voor $A+B$ op en bereken met behulp hiervan $E(A + B)$ en $\sigma(A + B)$. Controleer dat je hetzelfde antwoord krijgt als bij b.

Voorbeeld 2

Voor boogschutter A is stochast X het aantal punten dat hij bij elk schot behaalt.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = x)$	0,02	0,02	0,04	0,10	0,09	0,11	0,12	0,12	0,15	0,15	0,08

Tabel 6

Bij elke schotbeurt worden drie pijlen op het doel afgevuurd en de scores opgeteld. Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking voor elke schotbeurt.

Antwoord

Elke afgeschoten pijl beweegt onafhankelijk van de andere twee, dus bij elke schotbeurt hoort de stochast $S = X + X + X = 3X$.

De verwachtingswaarde per schotbeurt is daarom:

$\mathrm{E}(3X) = \mathrm{E}(X + X + X) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X) = 3 \cdot \mathrm{E}(X)$

De standaardafwijking per schotbeurt is:

$\sigma(3X) = \sigma(X + X + X) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(X)^2 + \sigma(X)^2} = \sqrt{3 \cdot \sigma(X)^2} = \sqrt{3} \cdot \sigma(X)$

Dit betekent dat voor elke schotbeurt geldt: $\mathrm{E}(3X) = 3 \cdot 6{,}22 = 18{,}66$ en $\sigma(3X) \approx \sqrt{3} \cdot 2{,}56 \approx 4{,}43$ punten.

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** worden de kansverdelingen voor X en $3X$ vergeleken.

a De kansverdeling voor $3X$ is erg omvangrijk. Wat zijn de eerste twee en wat zijn de laatste twee waarden?

b Bereken $\mathrm{P}(3X = 1)$.

c Hoe kun je nagaan dat $\mathrm{E}(3X) = 3 \cdot \mathrm{E}(X)$ en $\sigma(3X) = \sqrt{3} \cdot \sigma(X)$ zonder van de optelregels gebruik te maken?

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 2** nog eens de kansverdeling voor boogschutter A. Stel je voor dat het aantal punten van elke ring 2 hoger is. De stochast wordt dan $X + 2$.

a Waarom is $\mathrm{E}(X + 2) = \mathrm{E}(X) + 2$?

b Waarom is $\sigma(X + 2) = \sigma(X)$?

Voorbeeld 3

Iemand gooit 20 keer met een onzuivere munt. De verwachtingswaarde voor het aantal keren kop is 13. Bereken hoe groot de standaardafwijking is van de kansverdeling voor het aantal keren kop.

Antwoord

Noem het aantal keren kop per keer gooien X, dan heeft X een waarde van 0 of 1. Zeg dat de kans op kop gelijk is aan p, dan hoort daar deze kansverdeling bij:

x	0	1
$P(X = x)$	$1 - p$	p

Tabel 7

En daarbij hoort $\mathrm{E}(X) = p$ en $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$.

Er wordt 20 keer onafhankelijk van elkaar met een munt gegooid en je verwacht 13 keer kop. Dus $\mathrm{E}(20X) = 20 \cdot p = 13$ en hieruit volgt $p = 0{,}65$ en $\sigma(X) = \sqrt{0{,}35 \cdot 0{,}65} = \sqrt{0{,}2275}$.

De standaardafwijking van het aantal keren kop bij 20 keer gooien is $\sigma(20X) = \sqrt{20} \cdot \sqrt{0{,}2275} \approx 2{,}13$ keer kop.

Opgave 7

In **Voorbeeld 3** zie je dat stochast X staat voor het aantal keren kop als je met een onzuivere munt gooit.

a Laat zien dat $\mathrm{E}(X) = p$ en dat $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

b Hoe groot zijn de verwachtingswaarde en de standaardafwijking voor het aantal keren kop als je 60 keer met de onzuivere munt gooit? Rond indien nodig af op twee decimalen.

Opgave 8

Iemand gooit met tien dobbelstenen. Hoeveel ogen verwacht hij in totaal? Met welke standaardafwijking? Rond indien nodig af op twee decimalen.

Verwerken

Opgave 9

Je werpt met een zuivere dobbelsteen en een zuivere viervlaksdobbelsteen. X is het aantal ogen op de gewone dobbelsteen, Y het aantal ogen op de viervlaksdobbelsteen.

Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van $X + Y$.

Opgave 10

Elk weekend verkoopt Iris op marktjes haar zelfgemaakte sieraden. Gemiddeld is haar weekendomzet € 63,00 met een standaardafwijking van € 2,07.

Hoeveel bedraagt de verwachte omzet in een jaar met 52 weekenden? Welke standaardafwijking hoort daarbij?

Opgave 11

Als je een lot koopt in de staatsloterij is de kans dat er op dat lot een prijs valt 0,14. Stel je voor dat je met een groep medeleerlingen tien staatsloten hebt gekocht.

Op hoeveel loten verwacht je een prijs? Met welke standaardafwijking? Rond indien nodig af op twee decimalen.

Opgave 12

Bekijk de twee kansverdelingen. De stochasten X en Y zijn onafhankelijk van elkaar.

x_i	0	1		y_j	5	10	15
$\mathrm{P}(X = x_i)$	0,15	0,85		$\mathrm{P}(Y = y_j)$	0,25	0,40	0,35

Tabel 8

a Maak een kansverdeling voor $Y - X$.

b Laat zien dat $\mathrm{E}(Y - X) = \mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(X)$.

c Laat ook zien dat $\sigma(Y - X) = \sqrt{(\sigma(X))^2 + (\sigma(Y))^2}$. Reken met de niet afgeronde standaardafwijkingen.

Opgave 13

Stel dat een dobbelsteen aan één kant verzwaard is. De kans om 6 te gooien is daardoor niet meer $\frac{1}{6}$ maar $\frac{1}{4}$ geworden.

a Je gooit 250 keer met deze dobbelsteen. Hoeveel keer 6 mag je verwachten?

b Welke standaardafwijking hoort daarbij? Rond af op twee decimalen.

c Veronderstel dat de kansen om 1 tot en met 5 te gooien met deze dobbelsteen gelijk zijn. Wat is de verwachtingswaarde van het aantal ogen als je tien keer met deze dobbelsteen gooit?

Opgave 14

Bij een kansspel moet je met een onzuivere munt en een zuivere viervlaksdobbelsteen gooien. Als je kop gooit, krijg je € 1,00 en als je munt gooit niks. Voor de viervlaksdobbelsteen krijg je het aantal ogen in euro uitbetaald.

De inleg is € 3,00.

a Hoe groot is de kans op kop als per spel het verwachte verlies € 0,20 is?

b Bereken de standaardafwijking van de uitbetaling. Rond af op twee decimalen.

Toepassen

Opgave 15: Schoolexamen

Voor een bepaald onderdeel uit het schoolexamen moeten twee practicumtoetsen gemaakt worden. De toetsen zijn op die school door de jaren heen zodanig met elkaar te vergelijken, dat de school van het cijferbeeld betrouwbaar statistisch materiaal heeft verkregen.

	2e toets		
1e toets	5	6	7
4	10	5	0
5	11	5	2
6	8	14	7
7	3	13	12
8	0	4	6

Figuur 2

De tabel laat zien dat bijvoorbeeld $\frac{13}{100} = 13\%$ van alle deelnemers aan beide toetsen voor de eerste toets een 7 haalde en voor de tweede een 6. Stochast A is het cijfer dat een willekeurige leerling op grond van deze statistiek voor de eerste toets behaalt. Stochast B is het cijfer dat diezelfde leerling voor de tweede toets behaalt. Stochast $C = \frac{1}{2}(A + B)$.

a Stel de kansverdelingen voor A en B op.

b Welke betekenis heeft stochast C?

c Bereken de verwachtingswaarde van stochast C. Rond af op één decimaal.

d Bereken $\sigma(C)$. Rond af op twee decimalen. Leg uit waarom je in dit geval de standaardafwijking niet met de somregel voor twee stochasten kunt berekenen.

Opgave 16: Kaartspel

Bij een kaartspel geldt de volgende puntentelling:

- alle kaarten zonder plaatjes zijn ieder 0 punten waard
- een boer is 1 punt waard
- een vrouw is 2 punten waard
- een heer is 3 punten waard
- een aas is 4 punten waard

Bij dit spel pak je met terugleggen kaarten van de stapel en tel je de punten bij elkaar op. De verwachtingswaarde van het aantal punten is 10. Bereken in twee decimalen nauwkeurig de standaardafwijking van het aantal punten.

Figuur 3

Opgave 17: Bridge

Voordat je bij het kaartspel Bridge kunt gaan bieden, geef je de 13 kaarten die je in je hand hebt ieder een waarde:

- alle kaarten zonder plaatjes zijn ieder 0 punten waard
- een boer is 1 punt waard
- een vrouw is 2 punten waard
- een heer is 3 punten waard
- een aas is 4 punten waard

Je kunt alleen een openingsbod doen als het totale aantal punten van jouw hand kaarten minimaal 13 is.

a Is het verwachte aantal punten van een hand met 13 kaarten ook een geldig openingsbod?
Ga uit van de theoretische situatie dat iedere kaart in je hand uit een nieuw pak kaarten is gekozen.

b Bereken de standaardafwijking van het aantal punten per hand kaarten.

c Leg uit hoe je de kans op een openingsbod zou kunnen berekenen en laat zien waarom dit een enorme berekening wordt.
NB: Je hoeft deze kans dus niet te berekenen (tenzij je dat natuurlijk zelf leuk vindt!)

Testen

Opgave 18

Als je met twee geldstukken gooit dan kun je 0, 1 of 2 maal kruis gooien.

a Bereken de kans op elk aantal. Je mag aannemen dat de munten zuiver zijn.

b Bereken met deze kansen de verwachtingswaarde van het aantal keer kruis.

c Bereken met deze kansen de standaardafwijking van het aantal keer kruis.

d Bereken het verwachte aantal kruis als je 10 keer gooit met twee geldstukken.

e Bereken de standaardafwijking van het verwachte aantal kruis als je 10 keer gooit met twee geldstukken.

Opgave 19

Stel dat je aan de kopzijde van een geldstuk iets hebt afgeslepen. De kans op munt is daardoor niet meer gelijk aan de kans op kop.

Er wordt met deze munt geworpen. Op de lange duur blijft in ongeveer één op de drie keer gooien munt boven komt.

a Je werpt nu 100 keer met dit geldstuk. Hoeveel keer kop mag je verwachten? Rond af op gehelen.

b Welke standaardafwijking hoort daarbij?

c Beredeneer of dat de standaardafwijking van dit geldstuk groter of kleiner zou zijn dan die van een normaal geldstuk.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.