4.1 Stochasten

Inleiding

Er bestaan variabelen waarvan de uitkomst afhangt van het toeval. Voorbeelden te over waarbij je wel telkens goed moet afspreken wat je onder dit toeval (en de grootte van de kansen) moet verstaan. Neem bijvoorbeeld het 'boogschieten'. Voor iemand die zonder echt te mikken wel steeds zijn pijl ergens op de schietschijf krijgt zou je bij elke score kunnen spreken van toeval. Maar hoe stel je dit toeval vast? Kun je voor elke mogelijke score de kans erop vaststellen? En hoe dan wel?

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip (discrete) stochast (toevalsvariabele) en een bijbehorende kansverdeling opstellen;
- berekenen en werken met de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van een discrete stochast.

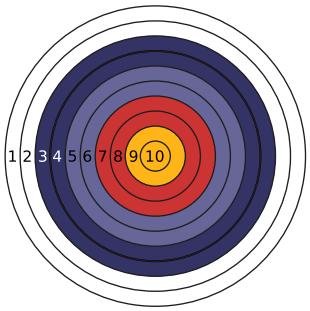
Voorkennis

- werken met frequentieverdelingen;
- werken met gemiddelde en standaardafwijking bij frequentieverdelingen.

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je de indeling van een schietschijf. Het aantal punten dat je bij een schot met één pijl kunt scoren is vooral voor onervaren boogschutters van het toeval afhankelijk. Neem aan dat het aantal punten D als een toevalsvariabele kan worden opgevat.



Figuur 2

a Verzin een manier om hiervoor een kansverdeling op te stellen.

b Is er verschil tussen ervaren of onervaren boogschutters voor wat betreft de kansverdeling?

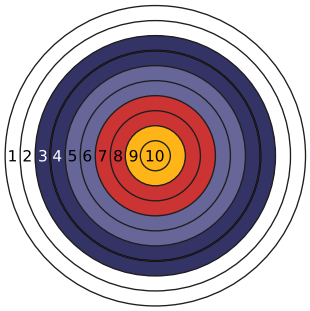
c Hoe bepaal je hoeveel punten je met één schot met een pijl gemiddeld kunt verwachten?

d Hoe zou je een wereldranglijst van beste boogschutters kunnen maken?

Uitleg

Het aantal punten dat je met boogschieten met één pijl behaalt, is een toevalsvariabele, ook wel een stochast genoemd. Omdat de stochast in dit geval geen waarden kan aannemen tussen de al gegeven waarden, spreek je van een discrete stochast.

Bij een bepaalde schutter kun je de relatieve frequentie van elke mogelijke score bepalen. Dit kun je opvatten als kansverdeling van de stochast.



Figuur 3

Je stelt de stochast vaak voor met een hoofdletter, bijvoorbeeld X. Een dergelijke kansverdeling ziet er dan zo uit:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = x)$	0,02	0,02	0,04	0,10	0,09	0,11	0,12	0,12	0,15	0,15	0,08

Tabel 1

Als je deze kansverdeling goed bekijkt, zie je dat dit geen hele goede boogschutter is: de roos wordt maar in 8% van de gevallen geraakt en de spreiding is nogal groot.

Door in de tabel telkens de score met de relatieve frequentie te vermenigvuldigen en de uitkomsten bij elkaar op te tellen, krijg je de verwachtingswaarde van het aantal punten per schot. Je vindt dan dat de verwachtingswaarde voor deze schutter 6,22 punten per schot is. De notatie is $E(X) = 6{,}22$ of $\mu(X) = 6{,}22$.
De verwachtingswaarde is een maat voor het centrum van de verdeling.

Voor de spreiding gebruik je een maat die standaardafwijking heet:

- Bereken van elke mogelijke score het verschil met de verwachtingswaarde en neem daarvan het kwadraat.
- Vermenigvuldig de gevonden getallen met hun relatieve frequentie.
- Tel alle uitkomsten bij elkaar op. Het getal dat je krijgt heet de variantie.
- Ten slotte trek je de wortel uit de variantie.

Dat geeft de standaardafwijking, een geschikte maat voor de spreiding van de kansverdeling. Voor deze schutter geldt een standaardafwijking van ongeveer 2,56. De notatie voor de standaardafwijking is $\sigma(X) \approx 2{,}56$. Voor de variantie noteer je $\text{Var}(X)$.

Je kunt dit ook met de grafische rekenmachine berekenen. Je voert dan de kansverdeling op de grafische rekenmachine in, net als een frequentietabel. Hoe dit gaat, zie je in het **Practicum**.

Opgave 1

Bekijk de kansverdeling van de boogschutter in de **Uitleg**.

a Beschrijf hoe deze kansverdeling tot stand is gekomen.

b Bereken zelf de verwachtingswaarde. Beschrijf wat dit getal voor de boogschutter precies betekent.

c Deze boogschutter schiet nu 15 keer op de roos. Hoeveel punten verwacht hij in totaal te behalen?

Opgave 2

Bekijk in de **Uitleg** hoe je de standaardafwijking van de kansverdeling berekent.

a Laat zien dat de standaardafwijking van de kansverdeling van de boogschutter ongeveer 2,56 is.

b Teken een kanshistogram van deze kansverdeling. Geef zowel de verwachtingswaarde als de standaardafwijking erin aan.

c Waarom zal de kansverdeling van een redelijk goede boogschutter niet symmetrisch zijn?

Opgave 3

Van een professioneel boogschutter wordt een tijd lang bijgehouden hoe hij schiet. Aan de hand van die gegevens wordt de volgende kansverdeling van zijn score per schot opgesteld:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = x)$	0,00	0,01	0,01	0,01	0,03	0,06	0,10	0,14	0,16	0,27	0,21

Tabel 2

Stochast X stelt het aantal punten per schot voor.

Bereken van deze boogschutter de verwachte score per schot en de bijbehorende standaardafwijking. Rond zo nodig af op vier decimalen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **toevalsvariabele** is een variabele waar bij elke waarde een bepaalde kans hoort dat die waarde optreedt. In plaats van toevalsvariabele zeg je ook wel **stochast**. Als het aantal mogelijke waarden dat de stochast kan aannemen eindig is of oneindig veel 'losse' waarden zonder tussenwaarden zijn (bijvoorbeeld 0,1,2,...), spreek je van een **discrete stochast**.

Bij stochast X met waarden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hoort een **kansverdeling**, een tabel met kansen $\mathrm{P}(X = x_i)$ waarbij $x = 1,2,\ldots,n$. Als alle kansen gelijk zijn, spreek je van een **uniforme kansverdeling**.

Een kansverdeling kan worden beschreven door:

- de **verwachtingswaarde** (of verwachting) van de stochast, notatie $\mathrm{E}(X)$ of $\mu(X)$:
  $\mathrm{E}(X) = x_1 \cdot \mathrm{P}(X = x_1) + x_2 \cdot \mathrm{P}(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot \mathrm{P}(X = x_n)$
  of korter:
  $$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathrm{P}(X = x_i)$$
- de **standaardafwijking** (of standaarddeviatie) van X, notatie $\sigma(X)$:
  de **variantie** van X is de verwachtingswaarde van de kwadraten van de verschillen $x_i - \mathrm{E}(X)$, en de standaardafwijking is de wortel uit de variantie. In formulevorm:
  $$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathrm{E}(X))^2 \cdot \mathrm{P}(X = x_i) \text{ en } \sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Voorbeeld 1

X is het aantal punten dat je bij boogschieten bij elk schot kunt behalen. Bekijk in de tabel voor speler A een kansverdeling van X.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathrm{P}(X = x)$	0,02	0,02	0,04	0,10	0,09	0,11	0,12	0,12	0,15	0,15	0,08

Tabel 3

Bereken bij deze kansverdeling de verwachtingswaarde en de standaardafwijking.

Antwoord

In de figuur staat de uitwerking met behulp van Excel.

Boogschieten: score speler A					
nummer	score	kans			
i	x	$P(X=x)$	$x \cdot P(X=x)$	$(x - E(X))^2$	$(x - E(X))^2 \cdot P(X=x)$
1	0	0,02	0,00	38,6884	0,773768
2	1	0,02	0,02	27,2484	0,544968
3	2	0,04	0,08	17,8084	0,712336
4	3	0,10	0,30	10,3684	1,03684
5	4	0,09	0,36	4,9284	0,443556
6	5	0,11	0,55	1,4884	0,163724
7	6	0,12	0,72	0,0484	0,005808
8	7	0,12	0,84	0,6084	0,073008
9	8	0,15	1,20	3,1684	0,47526
10	9	0,15	1,35	7,7284	1,15926
11	10	0,08	0,80	14,2884	1,143072
		$E(X)$ =	6,22	$Var(X)$ =	6,5316
				$\sigma(X)$ =	2,555699513

Figuur 4

Opgave 4

Voor een andere boogschutter is stochast Y het aantal punten dat hij bij elk schot behaalt. Bekijk de kansverdeling van Y.

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathrm{P}(Y = y)$	0,01	0,02	0,03	0,03	0,04	0,06	0,05	0,11	0,20	0,21	0,24

Tabel 4

a Bereken de verwachtingswaarde van Y.

b Bereken in twee decimalen nauwkeurig de standaardafwijking van Y.

c Vergelijk de twee frequentieverdelingen van de boogschutter uit het voorbeeld en deze boogschutter. Welk van beide boogschutters is de betere schutter? En hoe zie je dat aan de verwachtingswaarden en de standaardafwijkingen?

Voorbeeld 2

Stochast X stelt het aantal ogen voor op het vlak dat boven komt na het werpen met een gewone dobbelsteen. Stel een kansverdeling voor X op en bepaal de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van X.

Antwoord

De kansverdeling van X heet uniform, omdat alle kansen gelijk zijn.

x	1	2	3	4	5	6
$\mathrm{P}(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

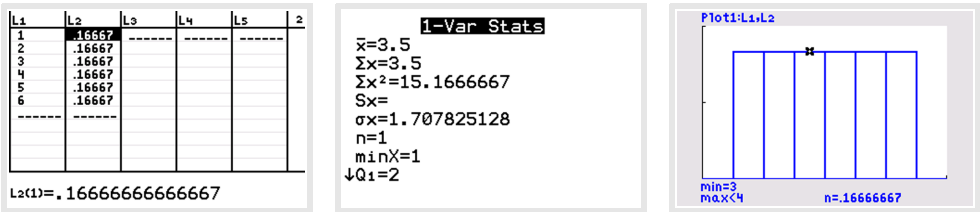
Tabel 5

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + \ldots + 6) = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot \frac{1+6}{2} = 3{,}5$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{(1-3{,}5)^2+(2-3{,}5)^2+\ldots+(6-3{,}5)^2}{6}} = \sqrt{\frac{17{,}5}{6}} \approx 1{,}71$$

Je kunt dit ook met de grafische rekenmachine berekenen. Je voert dan de kansverdeling op de grafische rekenmachine in, net als een frequentietabel. Hoe dit gaat, zie je in het **Practicum**.

Met behulp van de rekenmachine vind je ook dat $\mathrm{E}(X) = 3{,}5$ en $\sigma_X \approx 1{,}71$.



Figuur 5

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** staat de kansverdeling bij het werpen met één dobbelsteen. Je ziet hoe je met de hand de verwachtingswaarde en de standaardafwijking kunt uitrekenen.

a Licht de berekening voor $\mathrm{E}(X)$ toe. Denk aan de somformule voor rekenkundige rijen.

b Reken na dat de standaardafwijking een exacte waarde heeft van $\sqrt{\frac{17{,}5}{6}}$.

Opgave 6

Stochast Y stelt het aantal ogen voor op het vlak dat boven komt na het werpen met een achtvlaksdobbelsteen. Bepaal zowel met de hand als met de grafische rekenmachine de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van Y.

Voorbeeld 3

Stochast X stelt het aantal ogen voor op het vlak dat boven komt na het werpen met twee dobbelstenen. Stel een kansverdeling voor X op en bepaal de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van X.

Antwoord

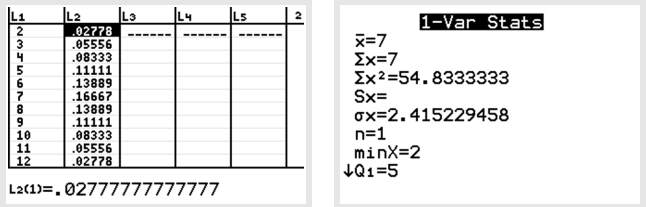
De kansverdeling van X maak je vanuit het overzicht van alle 36 mogelijkheden.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Tabel 6

Deze kansverdeling voer je op de grafische rekenmachine in, net als een frequentietabel.

Je vindt: $E(X) = 7$ en $\sigma(X) \approx 2{,}42$. Ga dat na.



Figuur 6

Opgave 7

Bekijk de kansverdeling in **Voorbeeld 3**.

a Licht de kansen in deze kansverdeling toe.

b Vergelijk de verwachtingswaarde en de standaardafwijking met die van het werpen met één dobbelsteen. Wat valt je op?

Verwerken

Opgave 8

Een loterij bestaat uit zeshonderd loten met de nummers 1 tot en met 600. Elk lot heeft een even grote kans om getrokken te worden.

Stochast X is het lotnummer van een lot.

a Waarom is de kansverdeling voor X uniform verdeeld?

b Bereken $E(X)$.

Opgave 9

De eigenaar van een ijssalon verdient € 300,00 op een zonnige dag. Als het niet zonnig is, heeft hij een verlies van € 60,00. De kans dat het zaterdag een zonnige dag wordt, is 0,3.

Hoeveel bedraagt de winstverwachting van de ijsverkoper op zaterdag?

Opgave 10

Iemand heeft de tijd t (seconde) gemeten die een groot aantal proefpersonen nodig had, om op een foto een bepaald voorwerp te herkennen. De resultaten staan in de tabel.

t	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(T = t)$	0,04	0,08	0,15	0,28	0,25	0,17	0,02	0,01

Tabel 7

De relatieve frequenties kun je opvatten als de kansen dat het voorwerp na zo veel seconden werd gevonden.

a Hoe groot is de kans dat het voorwerp door een willekeurige proefpersoon na drie seconden wordt herkend? En hoe groot is de kans dat hij er langer over doet?

b Hoeveel tijd verwacht je dat een proefpersoon nodig heeft om het voorwerp te herkennen? Welke standaardafwijking hoort daarbij? Rond af op twee decimalen.

c Hoe groot is de kans dat de herkenningstijd die een proefpersoon nodig heeft meer dan een standaardafwijking van de verwachtingswaarde afwijkt?

Opgave 11

In een vaas zitten twee witte en drie rode balletjes. Uit deze vaas worden zonder teruglegging balletjes getrokken, net zolang tot er een wit balletje wordt getrokken.

Hoe groot zijn de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het aantal benodigde trekkingen A?

Opgave 12

Hoeveel meisjes mag je in een gezin met drie kinderen verwachten, als de kans op de geboorte van een meisje 48% is?

Opgave 13

In een suikerfabriek staan twee machines voor het vullen van pakken suiker. Bij het afstellen op 1 kg blijken beide machines (machine 1 en 2) inderdaad pakken te vullen van ongeveer 1 kg. Toch komen er behoorlijke afwijkingen voor. De relatieve frequentieverdeling van de gewichten x in de tabel geeft dat weer.

x	970	980	990	1000	1010	1020	1030
$P(X_1 = x)$	0,04	0,07	0,12	0,18	0,25	0,29	0,05
$P(X_2 = x)$	0,00	0,00	0,15	0,30	0,35	0,20	0,00

Tabel 8

Hierbij correspondeert X_1 met machine 1 en X_2 met machine 2.

Deze frequentieverdelingen kun je opvatten als kansverdelingen.

a Toon aan dat beide kansverdelingen dezelfde verwachtingswaarde hebben. Hoe groot is die verwachting?

b Welk bezwaar heb je wanneer als maat voor de spreiding het verschil tussen de grootste en de kleinste waarde wordt genomen?

c Een andere maat voor de spreiding is de standaardafwijking. Wat kun je, puur op basis van de beide kanshistogrammen, al zeggen over het verschil in de beide standaardafwijkingen?

d Bereken de standaardafwijking voor de stochasten X_1 en X_2. Rond af op één decimaal.

e Hoeveel procent van de pakken suiker wijkt minder dan de standaardafwijking van het gemiddelde af? Bereken dit percentage voor beide machines afzonderlijk.

Toepassen

Opgave 14: Schijn bedriegt

In een speelhal kun je het volgende spel spelen. In een vaas zitten 7 ballen: 4 witte en 3 zwarte. Een speler doet willekeurig een greep van drie ballen uit de vaas. Voor elke witte bal in zijn greep ontvangt hij € 1,00 (en voor een zwarte bal ontvangt hij niets). De inzet die de speler aan de speelhal moet betalen is € 1,75 per spel.

Per keer spelen ontvangt een speler dus 0, 1, 2 of 3 euro. De kansen op deze vier mogelijkheden zijn achtereenvolgens: $\frac{1}{35}$, $\frac{12}{35}$, $\frac{18}{35}$ en $\frac{4}{35}$.

a Toon aan dat de kans op € 2,00 inderdaad $\frac{18}{35}$ is.

Iemand besluit het spel zestien keer te spelen. Hij maakt in een spel winst als hij meer dan € 1,75 ontvangt. De kans dat hij ten minste tien keer winst zal maken is groter dan $\frac{1}{2}$.

Het lijkt dus voor een speler wel gunstig om het spel te spelen.

b Toon aan dat de speelhal op de lange termijn toch winst zal maken met dit spel.

(bron: eindexamen vwo wiskunde B1, eerste tijdvak 2008)

Opgave 15: Chuck-a-luck

Bij het kansspel ‘Chuck-a-luck’ wordt met drie dobbelstenen gegooid. Stel dat je bij zo'n worp met drie dobbelstenen speelt op het aantal vijven. Komt er één vijf voor, dan krijg je de inleg terug. Komen er twee vijven voor, dan krijg je twee keer je inleg terug. Komen er drie vijven voor, dan krijg je maar liefst tien keer je inleg terug.

a Stochast A is het aantal vijven bij het werpen met drie dobbelstenen. Stel een bijbehorende kansverdeling op.

b Een andere stochast is de uitbetaling U per ingelegde euro per worp. Stel ook een daarbij passende kansverdeling op.

c Welke verwachtingswaarde en welke standaardafwijking heeft U? Rond af op twee decimalen.

d Ga je veel verdienen aan dit spel? Licht je antwoord toe.

Testen

Opgave 16

Je werpt vier keer met een zuivere dobbelsteen. Stochast X stelt het aantal zessen voor dat daarbij bovenkomt.

a Stel de kansverdeling van X op.

b Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van X.

Opgave 17

Twee op papier even sterke tennissers hebben de finale bereikt van hun clubkampioenschap. Ze moeten onderling in een partij, waarbij het gaat om drie gewonnen sets, uitmaken wie zich clubkampioen van dat jaar mag noemen. Winnaar van de finale is dus diegene die het eerst 3 sets op zijn naam brengt. Stochast T stelt het aantal te spelen sets voor.

a Stel een kansverdeling voor T op.

b Bereken $\mathrm{E}(T)$. Wat stelt dat getal in dit verband voor?

Practicum

Met de volgende practica kun je **het invoeren van kansverdelingen (als frequentieverdelingen) van de grafische rekenmachine** doornemen. Je kunt er dan ook diagrammen bij maken en de verwachtingswaarde (gemiddelde) en de standaardafwijking bepalen.

- **Statistiek met de TI84**
- **Statistiek met de TInspire**
- **Statistiek met de Casio fx-CG50**
- **Statistiek met de HPprime**
- **Statistiek en de NumWorks**

© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.