# 2.4 Toevalsvariabelen

## Inleiding

Bij basketbal wordt per speler het schotpercentage bijgehouden. Als iemand een schotpercentage van 25 heeft, scoort hij bij één op de vier doelpogingen. Je kunt dit percentage daarom opvatten als zijn trefkans bij elke doelpoging.
Maar hoe liggen zijn kansen als hij meerdere doelpogingen doet?

**Je leert in dit onderwerp**

- een kansverdeling maken voor een toevalsvariabele;
- kansen berekenen waarbij het gaat om minstens of hoogstens;
- het begrip verwachtingswaarde gebruiken;
- berekenen of twee toevalsvariabelen onafhankelijk zijn van elkaar.

**Voorkennis**

- kansen berekenen met behulp van het vaasmodel of een kansboom;
- de rekenregels voor kansen en met name de algemene productregel voor kansen;
- statistische begrippen zoals relatieve frequentie, centrummaten, spreidingsmaten en kwantitatieve variabelen.

## Verkennen

### Opgave V1

Bij basketbal wordt per speler het schotpercentage bijgehouden. Als iemand een schotpercentage van 25 heeft, scoort hij bij één op de vier doelpogingen. Je kunt dit percentage daarom opvatten als zijn trefkans bij elke doelpoging. $X$ stelt het aantal scores voor bij drie doelpogingen.

**a** Welke waarden kan $X$ aannemen?

**b** Bereken bij elke waarde van $X$ de bijbehorende kans.

**c** Welke score verwacht je van hem?

Figuur 1

## Uitleg

Bij basketbal gaat het erom zo vaak mogelijk in de basket te gooien. Het aantal keren dat een speler scoort, hangt af van zijn schotpercentage en het aantal keren dat hij op de basket schiet. Als een speler een schotpercentage van 25 heeft, scoort hij gemiddeld bij één op de vier doelpogingen. Je kunt dit percentage daarom opvatten als zijn trefkans bij elk schot. Om het aantal scores te berekenen, heb je de mogelijke aantallen scores en hun kansen nodig.

Als een speler met een schotpercentage van 25 drie keer schiet, hoe vaak zal hij dan gemiddeld scoren?

Als $X$ het aantal scores bij deze drie schoten voorstelt, kan $X$ de waarden 0,1,2,3 aannemen. $X$ noem je een toevalsvariabele.

De bijbehorende kansen kun je berekenen vanuit de kansboom. Bijvoorbeeld:

$\text{P}(X = 2) = 0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 + 0{,}25 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 + 0{,}75 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25 \approx 0{,}141$

Zet nu voor alle mogelijke uitkomsten de kansen in bijvoorbeeld een tabel. Dat heet dan een de ‘kansverdeling’ van $X$:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X = x)$ | 0,422 | 0,422 | 0,141 | 0,016 |

**Tabel 1**

Gemiddeld heeft hij bij drie schoten:

$0 \cdot 0{,}422 + 1 \cdot 0{,}422 + 2 \cdot 0{,}141 + 3 \cdot 0{,}016 = 75$ scores

Dit noem je de ‘verwachte score’ of ‘verwachtingswaarde’ (bij drie schoten).

De verwachtingswaarde is een maat voor het centrum van een verdeling.

### Opgave 1

Lees eerst de **Uitleg**. Neem nu aan dat de basketballer vier doelpogingen doet. Zijn schotpercentage blijft 25.

**a** Stel een kansverdeling op voor het aantal scores. Benader de kansen in vier decimalen nauwkeurig.

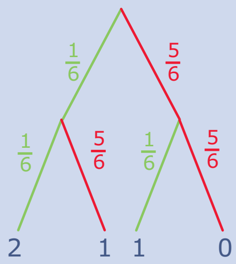
**b** Bereken het verwachte aantal scores bij vier doelpogingen.

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

Als een bepaalde variabele $X$ van het toeval afhangt, noem je $X$ een **toevalsvariabele**, een **stochast**. Stochast komt van het Griekse ‘stochastikos’ dat gissend of mikkend betekent. Bij elke waarde die $X$ kan aannemen, kun je de bijbehorende kans berekenen (vanuit een kansboom of frequentietabel of een histogram).

Zet je al die kansen op een rij, bijvoorbeeld in een tabel, dan is dat een **kansverdeling** van $X$. Noem je bij het werpen met twee dobbelstenen het aantal zessen $X$, dan is $X$ een voorbeeld van zo'n toevalsvariabele. De bijbehorende kansverdeling haal je uit de kansboom.




**Figuur 2**

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X = x)$ | $\frac{25}{36}$ | $\frac{10}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

**Tabel 2**

Ga na dat de som van alle kansen in zo'n kansverdeling 1 is.

Gemiddeld komt er per worp met twee dobbelstenen $0 \cdot \frac{25}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ keer een zes voor. Dat heet de **verwachtingswaarde** van het aantal zessen bij het werpen met twee dobbelstenen. Bij gemiddeld één op elke drie worpen (met twee dobbelstenen) komt een zes voor, als je maar vaak genoeg gooit.

Als je van twee toevalsvariabelen $X$ en $Y$ elk een kansverdeling hebt en bovendien alle gecombineerde kansen $\mathrm{P}(X = x \text{ en } Y = y)$ via een steekproef verzameld hebt, dan is het mogelijk om te bepalen of $X$ en $Y$ **(on)afhankelijk** van elkaar zijn.

$X$ en $Y$ zijn onafhankelijk als voor alle gecombineerde kansen de algemene **productregel voor kansen** geldt: $\mathrm{P}(X = x \text{ en } Y = y) = \mathrm{P}(X = x) \cdot \mathrm{P}(Y = y)$.
Dit is onderdeel van de **bivariate statistiek** waarin je onderzoek doet naar mogelijke samenhang tussen twee toevalsvariabelen.

## Voorbeeld 1

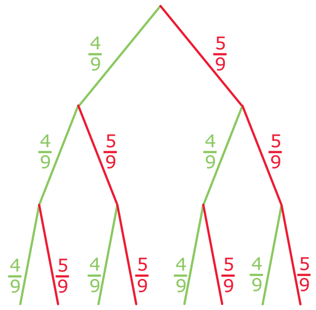
In een groep van vier mannen en vijf vrouwen worden door loten drie taken verdeeld.
Als één persoon meerdere van die drie taken mag uitvoeren, hoe groot is dan de kans dat er hoogstens twee taken door een man worden uitgevoerd?

Antwoord

Je ziet een bijpassende kansboom. Groen betekent dat de taak door een man wordt gedaan, rood dat het een vrouw betreft. Met behulp van de kansboom maak je deze kansverdeling voor het aantal taken dat door een man wordt uitgevoerd.

| $m$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $\text{P}(M = m)$ | $\frac{125}{729}$ | $\frac{300}{729}$ | $\frac{240}{729}$ | $\frac{64}{729}$ |

Tabel 3




Figuur 3

Gevraagd wordt de kans dat er 0, 1 of 2 taken door een man worden uitgevoerd:

$$\text{P}(M = 0 \text{ of } M = 1 \text{ of } M = 2) = \frac{125}{729} + \frac{300}{729} + \frac{240}{729} = \frac{665}{729}$$

Je kunt het ook zo berekenen:

$$\text{P}(M = 0 \text{ of } M = 1 \text{ of } M = 2) = 1 - \text{P}(M = 3) = 1 - \frac{64}{729} = \frac{665}{729}$$

### Opgave 2

Bekijk **Voorbeeld 1**.

**a** Reken de kansen $\text{P}(M = 1)$ en $\text{P}(M = 2)$ zelf na.

**b** Bereken de kans dat er minstens twee taken door een man worden uitgevoerd.

**c** Bereken de kans dat er minder dan twee taken door een man worden uitgevoerd.

### Opgave 3

Je gooit met drie dobbelstenen.

**a** Stel een kansverdeling op voor het aantal keer dat je 6 gooit.

**b** Bereken het verwachte aantal keer dat je 6 gooit.

**c** Beschrijf welke betekenis de verwachtingswaarde hier heeft.

## Voorbeeld 2

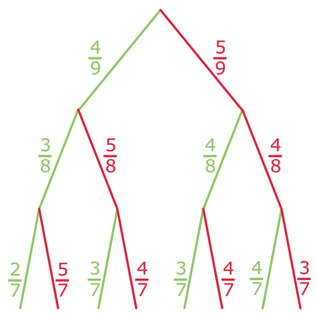
In een groep van vier mannen en vijf vrouwen worden door loten drie taken verdeeld.
Als elk van die drie taken door een andere persoon moet worden gedaan, hoe groot is dan de kans dat er minstens twee taken door een man worden uitgevoerd?
Hoeveel taken worden er naar verwachting door een man uitgevoerd?

Antwoord

Je ziet een bijpassende kansboom. Groen betekent dat de taak door een man wordt gedaan, rood dat het een vrouw betreft. Met behulp van de kansboom maak je deze kansverdeling voor het aantal taken dat door een man wordt uitgevoerd.

| $m$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $\text{P}(M = m)$ | $\frac{60}{504}$ | $\frac{240}{504}$ | $\frac{180}{504}$ | $\frac{24}{504}$ |

Tabel 4




Figuur 4

Gevraagd wordt de kans dat er twee of drie taken door een man worden uitgevoerd:

$\text{P}(M = 2 \text{ of } M = 3) = \frac{180}{504} + \frac{24}{504} = \frac{204}{504} = \frac{17}{42}$

Naar verwachting worden er $0 \cdot \frac{60}{504} + 1 \cdot \frac{240}{504} + 2 \cdot \frac{180}{504} + 3 \cdot \frac{24}{504} = 1\frac{1}{3}$ taken door een man gedaan.

## Opgave 4

In **Voorbeeld 2** wordt de verwachtingswaarde voor $M$ uitgerekend.

**a** Bereken zelf met behulp van een kansverdeling de verwachtingswaarde van het aantal taken dat door een vrouw wordt uitgevoerd.

**b** Verrast het antwoord bij a je?

## Voorbeeld 3

Voor een bepaalde instaptoets worden alleen gehele cijfers van 1 tot en met 10 gegeven. Daarvan zijn jarenlang de resultaten bijgehouden.

| cijfer | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| relatieve frequentie (%) | 0 | 0 | 4 | 12 | 20 | 26 | 18 | 11 | 7 | 2 |

**Tabel 5**

Ook dit jaar doet een aantal personen deze instaptoets.
Welk gemiddelde cijfer verwacht men?
Hoeveel procent zal een voldoende halen?

Antwoord

De frequentietabel van een kwantitatieve variabele zoals deze is op te vatten als een kansverdeling.

De bijbehorende verwachtingswaarde is:
$1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0{,}04 + 4 \cdot 0{,}12 + 5 \cdot 0{,}20 + 6 \cdot 0{,}26 + 7 \cdot 0{,}18 + 8 \cdot 0{,}11 + 9 \cdot 0{,}07 + 10 \cdot 0{,}02 = 6{,}13$
Dus men verwacht een gemiddeld cijfer van 6,1.

Voor het halen van een voldoende moet je minstens een 6 scoren.
De kans daarop is: $0{,}26 + 0{,}18 + 0{,}11 + 0{,}07 + 0{,}02 = 0{,}64$, dus waarschijnlijk zal 64% een voldoende halen.

## Opgave 5

In **Voorbeeld 3** wordt een verwachtingswaarde uitgerekend bij statistische gegevens.
De plant ‘Indigofera australis’ plant zich voort door middel van zaden die in zaaddozen aan de plant groeien. Het aantal zaden per zaaddoos kan nogal variëren. Een Britse onderzoeker heeft van een flink aantal zaaddozen het aantal zaden geteld en zijn resultaten vastgelegd in een tabel.

| aantal zaden | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| frequentie | 1 | 2 | 8 | 13 | 22 | 45 | 63 | 23 | 1 |

**Tabel 6**

Neem aan dat deze tabel representatief is voor het aantal zaden per zaaddoos voor deze plant. De relatieve frequenties zijn dan op te vatten als kansen van een toevalsvariabele $Z$ die het aantal zaden per zaaddoos van ‘Indigofera australis’ voorstelt.

**a** Maak de bijbehorende tabel met relatieve frequenties in vier decimalen nauwkeurig.

**b** Bereken $\text{P}(Z > 8)$. Hoeveel procent van de zaaddozen van deze plant heeft meer dan acht zaden?

**c** Hoe groot is de kans op hoogstens vier zaden in een willekeurig gekozen zaaddoos van deze plant?

**d** Hoeveel zaden (in twee decimalen) verwacht je per zaaddoos?

## Voorbeeld 4

In de kruistabel zie je toevalsvariabelen $G$ (geslacht) en $K$ (wel/niet kleurenblind). De onderste rij is de kansverdeling voor $K$ en de rechter kolom is de kansverdeling voor $G$, voor een steekproef van 1000 personen. Je kunt ook zien dat bijvoorbeeld de gecombineerde kans $\text{P}(G = M \text{ en } K = \text{wel}) = 0{,}041$.
Is er in deze steekproef samenhang tussen iemands geslacht en de mogelijkheid om kleurenblind te zijn?

| | $K$ = niet | $K$ = wel | |
|---|---|---|---|
| $V$ | 0,488 | 0,002 | 0,49 |
| $M$ | 0,469 | 0,041 | 0,51 |
| | 0,957 | 0,043 | |

Tabel 7

Antwoord

Als voor alle vier de gecombineerde kansen $\text{P}(G = g \text{ en } K = k)$ geldt dat ze gelijk zijn aan $\text{P}(G = g) \cdot \text{P}(K = k)$, dan zijn toevalsvariabelen $G$ (geslacht) en $K$ (wel/niet kleurenblind) onafhankelijk van elkaar.
Je weet al: $\text{P}(G = M \text{ en } K = \text{wel}) = 0{,}041$
$\text{P}(G = M) \cdot \text{P}(K = \text{wel}) = 0{,}51 \cdot 0{,}043 \approx 0{,}0219$
Dit is dus ongelijk aan $\text{P}(G = M \text{ en } K = \text{wel})$.
Dit betekent dat minstens één van de gecombineerde kansen ongelijk is aan het product van de afzonderlijke kansen: toevalsvariabelen $G$ en $K$ zijn afhankelijk van elkaar.
Anders gezegd: de mogelijkheid om kleurenblind te zijn, hangt samen met iemands geslacht.

### Opgave 6

| | was | afwas | auto | |
|---|---|---|---|---|
| M | 6 | 3 | 12 | 21 |
| V | 8 | 11 | 2 | 21 |
| | 14 | 14 | 14 | |

Tabel 8

In een groep van vier mannen en vijf vrouwen worden door loten drie taken (wassen, afwassen en auto wassen) verdeeld. Je kunt twee toevalsvariabelen onderscheiden: $G$ voor het geslacht van de personen en $T$ voor de mogelijke taken. Als de taken door loting met eerlijke middelen worden verdeeld, dan verwacht je dat $G$ en $T$ onafhankelijk zijn van elkaar. Ondertussen gaat deze groep personen meerdere keren per jaar met elkaar op stap en elke keer weer worden de taken onderling verdeeld. Alleen: dat gaat niet via loting! Na een aantal jaar vraagt men zich af: gebeurt dit wel eerlijk? De statisticus onder hen wil dit doen door te berekenen of $G$ en $T$ onafhankelijk van elkaar zijn en heeft zijn verzamelde gegevens in een kruistabel gezet.

**a** Maak van de kruistabel met absolute aantallen een kruistabel met kansen.

**b** Bepaal of de gebeurtenissen $G$ = man en $T$ = afwassen onafhankelijk zijn van elkaar.

**c** Zijn toevalsvariabelen $G$ en $T$ onafhankelijk van elkaar? Beargumenteer je antwoord en geef aan of de verdeling van de taken eerlijk is gebeurd.

## Verwerken

### Opgave 7

Het aantal jongens in een gezin met vier kinderen is een toevalsvariabele $J$. Ga ervan uit dat de kans op de geboorte van een meisje hetzelfde is als de kans op de geboorte van een jongen.

**a** Maak een tabel met de kansverdeling van $J$.

**b** Hoe groot is de kans dat een gezin van vier kinderen uit minstens twee jongens bestaat?

Bereken deze kans op twee manieren en benoem de twee rekenmethodes.

**c** Wat vermoed je over het verwachte aantal jongens in zo'n gezin? Reken na of je vermoeden klopt.

**d** Als je 150 van die gezinnen bekijkt, hoeveel jongens komen daar naar verwachting dan in voor?

### Opgave 8

Uit een vaas met dertig rode en drie groene balletjes wordt vier keer een balletje getrokken.

**a** $X$ stelt het aantal getrokken groene balletjes voor als telkens wordt teruggelegd. Stel de kansverdeling van $X$ op.

**b** $Y$ stelt het aantal getrokken groene balletjes voor als niet wordt teruggelegd. Stel de kansverdeling van $Y$ op.

### Opgave 9

Uit een klas met zestien meisjes en twaalf jongens worden vier leerlingen gekozen. $M$ is het aantal meisjes in die groep van vier.

**a** Welke waarden kan $M$ aannemen?

**b** Stel een kansverdeling op voor $M$.

**c** Bepaal het verwachte aantal meisjes in de groep van vier.

### Opgave 10

Je gooit met twee dobbelstenen en vermenigvuldigt het aantal ogen op de ene dobbelsteen met het aantal ogen op de andere. Dat is de waarde van de toevalsvariabele $Z$.

**a** Stel de kansverdeling van $Z$ op.

**b** Je krijgt de waarde die $Z$ aanneemt uitbetaald in euro's. Zou je voor dat spel € 12,00 willen inzetten? Hoe groot is dan de kans dat je met één spel iets wint?

### Opgave 11

In de finale herenenkel van het tennistoernooi van Wimbledon wordt gespeeld om 'best of five': wie het eerst drie sets heeft gewonnen, is kampioen. Na hoogstens vijf sets is er dus een winnaar; het kan al na drie sets. Neem je aan dat beide finalisten even sterk zijn en kans 50% hebben om een set te winnen, dan is het aantal in de finale gespeelde sets een toevalsvariabele $S$.

**a** Maak daarvan een kansverdeling en bereken het verwachte aantal sets.

**b** Neem aan dat het toernooi van Wimbledon al honderd keer is gespeeld. Hoeveel sets zijn er dan naar verwachting in totaal in de finales gespeeld?

De werkelijke gegevens leren toch anders, zie de tabel over 90 finales.

| partijlengte | 3 sets | 4 sets | 5 sets |
|---|---|---|---|
| aantal keer | 44 | 22 | 24 |

**Tabel 9**

**c** Bepaal de experimentele kansverdeling en verwachtingswaarde van $S$.

**d** De oorspronkelijke aanname was dus niet zo goed. Stel je nu voor dat de kans om de eerste set te winnen 50% blijft, maar de kans om de set na een gewonnen set te winnen 70% is (de 'winning mood').

Maak nu opnieuw een kansverdeling (bekijk zorgvuldig alle gevallen).

**e** Bereken het verwachte aantal sets bij de nieuwe kansverdeling.

### Opgave 12

De directie van een autoreparatiebedrijf vraagt zich af of de kwaliteit van het autospuitwerk afhankelijk is van de verfspuiter van dienst. Ze nemen een steekproef van 1000 gespoten auto's. De resultaten zie je in deze kruistabel.

| $K \setminus V$ | A | B | |
|---|---|---|---|
| goed | 576 | 368 | 944 |
| niet goed | 24 | 32 | 56 |
| | 600 | 400 | 1000 |

**Tabel 10**

$V$ stelt de verfspuiter voor en $K$ stelt de kwaliteit van het spuitwerk voor.

Is de kwaliteit van het spuitwerk afhankelijk van de verfspuiter van dienst? Zo ja, welke verfspuiter levert de beste kwaliteit?

Beargumenteer je antwoord met statistisch bewijs. Geef, beargumenteerd, aan of je hierbij ook de verwachtingswaarden voor $V$ en/of voor $K$ kunt gebruiken.

## Toepassen

### Opgave 13: Vreemde dobbelstenen

De investeerder Warren Buffett houdt van dobbelspelletjes met ongebruikelijke dobbelstenen. Hij daagt Bill Gates, de oprichter van Microsoft, uit voor een spelletje waarbij ze allebei een dobbelsteen mogen werpen. Degene met het hoogste ogenaantal wint.
Ze gebruiken drie dobbelstenen: een blauwe, een groene en een rode. De ogenaantallen staan in deze tabel.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| blauw | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 6 |
| groen | 2 | 2 | 2 | 5 | 5 | 5 |
| rood | 1 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |

**Tabel 11**

Warren laat Bill als eerste een dobbelsteen kiezen, en nadat Bill de blauwe pakt, kiest Warren de rode dobbelsteen.

**a** Bereken de kans dat Warren wint.

Even later spelen Warren en Bill weer tegen elkaar, maar de spelregels zijn veranderd. Er zijn nu twee blauwe, twee groene en twee rode dobbelstenen. Warren kiest twee dobbelstenen van gelijke kleur, waarna Bill twee andere dobbelstenen van gelijke kleur moet kiezen. De winnaar is degene met de hoogste som van zijn ogenaantallen.

Warren begint. Hij kiest de twee rode dobbelstenen. De kansverdeling voor de som van zijn ogenaantallen staat in deze tabel.

| | | | |
|---|---|---|---|
| som | 2 | 5 | 8 |
| kans | $\frac{1}{36}$ | $\frac{10}{36}$ | $\frac{25}{36}$ |

**Tabel 12**

Bill kiest de twee groene dobbelstenen.

**b** Bereken de kans dat Bill wint.

**(bron: examen vwo wiskunde A in 2014, tweede tijdvak)**

### Opgave 14: Casino

In een casino wordt maximaal zes keer met een zuivere munt geworpen totdat ‘kruis’ boven komt. De speler krijgt 1, 2, 4, 8, 16 of 32 euro uitbetaald als bij worp nummer 1, 2, 3, 4, 5 respectievelijk 6 voor het eerst kruis wordt gegooid. Bij zes keer munt krijgt hij niets. $Y$ is de uitbetaling in euro’s.

**a** Stel de kansverdeling van $Y$ op.

**b** Welke inzet moet het casino voor dit spel ten minste vragen om er op de lange duur geen geld bij in te schieten?

**c** Hoe groot is de kans dat je bij het spelen van dit spel minstens € 16,00 uitbetaald krijgt?

## Testen

### Opgave 15

Het bestuur van de korfbalclub telt zeven leden, vier vrouwen en drie mannen. Door loten wordt daaruit een dagelijks bestuur van drie leden gekozen. Het aantal vrouwen in het dagelijkse bestuur is een toevalsvariabele $Z$.

**a** Stel de kansverdeling van $Z$ op.

**b** Hoe groot is de kans dat er minstens twee vrouwen in de bestuur zitten?

**c** Bereken het verwachte aantal vrouwen in het bestuur.

### Opgave 16

Vogeldeskundigen willen weten welke vogelsoorten in een bepaald gebied leven. Een eenvoudige manier om daar achter te komen is het maken van een ronde door dat gebied en alle waargenomen vogels te registreren. Men spreekt van een registratie-effectiviteit van 100% wanneer alle aanwezige vogels opgemerkt worden. In de praktijk blijkt de registratie-effectiviteit per ronde slechts 60% te zijn, de overige 40% van de totale vogelpopulatie wordt niet opgemerkt. De Zweedse vogeldeskundige Anders Enemar stelt dat de registratie-effectiviteit door het maken van drie ronden zodanig wordt verhoogd, dat men vrijwel zeker mag aannemen dat alle vogelsoorten zijn opgemerkt. Hij neemt daarbij aan dat iedere aanwezige vogel bij elke ronde 60% kans heeft om opgemerkt te worden.

**a** Bereken hoeveel procent van de totale populatie naar verwachting na drie ronden nog niet zal zijn opgemerkt.

Na drie ronden is de vogelpopulatie verdeeld in vier categorieën: I, II, III, IV.

- I: niet opgemerkt
- II: één keer opgemerkt
- III: twee keer opgemerkt
- IV: drie keer opgemerkt

**b** Welke van deze vier categorieën bevat de meeste exemplaren? Licht je antwoord toe met een berekening.

Stel dat er bij iedere ronde ongeveer 450 vogels worden opgemerkt.

**c** Bereken hoeveel vogels er ongeveer bij de derde ronde voor het eerst worden opgemerkt.

**(examen havo wiskunde A in 1990, eerste tijdvak)**

## Opgave 17

Voor de productie van gevoelige druktoetsen heeft een fabriek twee machines in bedrijf. Machine A neemt 60% van de productie voor zijn rekening, machine B 40%. De kans dat een druktoets foutief uit één van beide machines komt, is 0,65%.

De directie van de fabriek beweert dat het goed-zijn van een druktoets onafhankelijk is van de machine waarmee hij gemaakt is.

| | goed | fout | |
|---|---|---|---|
| machine A | | | 0,6 |
| machine B | | | 0,4 |
| | | | 1 |

**Tabel 13**

Vul de kanstabel (kruistabel) voor de druktoetsen zodanig in dat de bewering van de fabrieksdirectie waar is.