2.3 Kansen vermenigvuldigen

Inleiding

Je hebt kennis gemaakt met regels voor de kansrekening. Vooral als het gaat om grotere hoeveelheden en meerdere trekkingen zijn dergelijke regels nuttig.
Daarom leer je nu wanneer je kansen mag vermenigvuldigen. Hierbij is het vaasmodel weer erg handig.

Je leert in dit onderwerp

- de regels voor het vermenigvuldigen van kansen waaronder de productregel;
- werken met afhankelijke en onafhankelijke gebeurtenissen;
- voorwaardelijke kansen berekenen.

Voorkennis

- kansen bepalen met behulp van een kansboom;
- kansen berekenen met behulp van de somregel en de complementregel;
- het vaasmodel met of zonder teruglegging voor het berekenen van kansen;
- statistische begrippen zoals steekproef, variabele en frequentie;
- combinatoriek (telproblematiek), bijvoorbeeld permutaties berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Een volledig kaartspel kent 52 kaarten, van elke ‘kleur’ evenveel. Je trekt aselect uit zo'n kaartspel twee kaarten.

a Bereken de kans op twee azen.

b Bereken de kans op een hartenkaart en een aas. (Als je hartenaas pakt, heb je met deze éne kaart meteen al een hartenkaart en een aas.)

Figuur 1

Uitleg

Je trekt aselect uit een volledig kaartspel twee kaarten. Je kunt dit opvatten als tegelijk twee kaarten trekken of als twee kaarten na elkaar trekken maar zonder terugleggen. Dit betekent dat de trekking van de tweede kaart afhankelijk is van die van de eerste kaart: bij de tweede trekking is er een kaart minder om uit te kiezen.

De kans op een aas bij de eerste kaart is $\frac{4}{52}$. De kans op een aas bij de tweede kaart is $\frac{3}{51}$. De kans op een aas bij de tweede kaart is dus anders dan de kans op een aas bij de eerste kaart.

Voor de kans op twee azen geldt: $P(2\text{ azen}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{12}{2652}$

Voor de kans op twee azen bij trekking zonder terugleggen geldt:
$P(2\text{ azen}) =$
text(P)(1^e keer aas) $\cdot$ P (2^e keer aas als de 1^e keer al aas was))

Bij het berekenen van de tweede kans houd je dus rekening met wat er eerder is gebeurd.

Opgave 1

Uit een compleet spel speelkaarten worden aselect en zonder terugleggen twee kaarten getrokken.

a Waarom is de tweede trekking van de tweede kaart afhankelijk van de eerste trekking?

b Wat is de kans dat je de eerste keer een hartenkaart en de tweede keer een schoppenkaart trekt?

c Wat is de kans op een harten- en een schoppenkaart?

d Wat is een voorwaardelijke kans?

e Bereken de volgende kans: P (tweede trekking een schoppenkaart als de eerste trekking een hartenkaart gaf)

f Wat is de kans op een vrouw en een heer?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Als G_1 een gebeurtenis is bij een kansexperiment en G_2 een gebeurtenis bij een tweede kansexperiment en als de kansen van het tweede experiment 'onafhankelijk' zijn van de uitkomst van het eerste, dan geldt:

$\text{P}(G_1 \text{ en } G_2) = \text{P}(G_1) \cdot \text{P}(G_2)$

In het vaasmodel is dit het geval als je 'met terugleggen' meerdere balletjes trekt.

Je schrijft voor de kans op G_2 onder de voorwaarde dat G_1 eerst heeft plaatsgevonden: $\text{P}(G_2|G_1)$. Je noemt dit **voorwaardelijke kans**.

Als G_1 een gebeurtenis is bij een kansexperiment en G_2 een gebeurtenis bij een tweede kansexperiment en als de kansen van het tweede experiment 'afhankelijk' zijn van de uitkomst van het eerste, dan geldt:

$\text{P}(G_1 \text{ en } G_2) = \text{P}(G_1) \cdot \text{P}(G_2|G_1)$

In het vaasmodel is dit het geval als je 'zonder terugleggen' meerdere balletjes trekt.

De regel $\text{P}(G_1 \text{ en } G_2) = \text{P}(G_1)\cdot\text{P}(G_2|G_1)$ heet wel de **algemene productregel voor kansen** omdat hij ook geldig is voor onafhankelijke gebeurtenissen.

Dan is namelijk $\text{P}(G_2|G_1) = \text{P}(G_2)$.

Voorwaardelijke kansen kom je ook tegen in de bivariate statistiek waarin je onderzoekt of en hoe de ene variabele de andere variabele beïnvloedt.

Voorbeeld 1

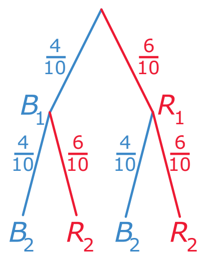
Uit een vaas met zes rode en vier blauwe knikkers worden met terugleggen twee knikkers getrokken. Hoe groot is de kans op een rode en een blauwe knikker?

Antwoord

Het maakt bij de tweede trekking niet uit of de eerst getrokken knikker rood of blauw was. Door het terugleggen is immers de oorspronkelijke situatie weer hersteld. De tweede trekking is daarom onafhankelijk van de eerste.

Je kunt dus de productregel voor onafhankelijke kansen gebruiken:

- De kans dat je eerst een rode en dan een blauwe knikker trekt, is: $\text{P}(R_1 \text{ en } B_2) = \text{P}(R_1) \cdot \text{P}(B_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$
- De kans dat je eerst een blauwe en dan een rode knikker trekt, is: $\text{P}(B_1 \text{ en } R_2) = \text{P}(B_1) \cdot \text{P}(R_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$



Figuur 2

Beide gebeurtenissen sluiten elkaar uit: $\text{P}(R \text{ en } B) = \frac{24}{100} + \frac{24}{100} = \frac{12}{25}$

Opgave 2

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Bereken de kans op twee blauwe knikkers.

b Bereken de kans op twee rode knikkers.

c Waarom is hier geen sprake van voorwaardelijke kansen?

Voorbeeld 2

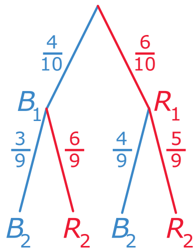
Uit een vaas met zes rode en vier blauwe knikkers worden zonder terugleggen twee knikkers getrokken.
Hoe groot is de kans op een rode en een blauwe knikker?

Antwoord

Het maakt bij de tweede trekking verschil of de eerst getrokken knikker rood of blauw was. Door niet terug te leggen is immers de oorspronkelijke situatie gewijzigd. De tweede trekking is daarom afhankelijk van de eerste.

Je kunt dus de productregel voor afhankelijke kansen gebruiken:

- De kans dat je eerst een rode en dan een blauwe knikker trekt, is: $\text{P}(R_1 \text{ en } B_2) = \text{P}(R_1) \cdot \text{P}(B_2|R_1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{24}{90} = \frac{4}{15}$
- De kans dat je eerst een blauwe en dan een rode knikker trekt, is: $\text{P}(B_1 \text{ en } R_2) = \text{P}(B_1) \cdot \text{P}(R_2|B_1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{24}{90} = \frac{4}{15}$



Figuur 3

Beide gebeurtenissen sluiten elkaar uit, dus: $\text{P}(R \text{ en } B) = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Bereken de kans op twee blauwe knikkers.

b Bereken de kans op twee rode knikkers.

c Bereken de voorwaardelijke kans $\text{P}(B_2|B_1)$.

d Waarom is het berekenen van $\text{P}(B_2|B_2)$ onmogelijk?

Opgave 4

Het bestuur van een politieke partij heeft vier oplossingen bedacht voor een maatschappelijk probleem. Na een enquête onder hun leden nodigen ze 800 leden van hun partij uit: 200 mensen die voor oplossing A zijn, 200 voor oplossing B, 200 voor oplossing C en 200 voor oplossing D. Tijdens de bijeenkomst gebruiken ze de ledennummers van de genodigden om uit de groep van 800 mensen een aselecte groep van 32 mensen te kiezen. Dit wordt de werkgroep die met het maatschappelijk probleem aan de slag gaat.

a Wat is de kans dat de gehele werkgroep voor oplossing A is? Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie.

b Wat is de kans dat de werkgroep uit 10 mensen bestaat die oplossing A willen, 15 mensen die oplossing C willen en 7 mensen die oplossing D willen? Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie.

Voorbeeld 3

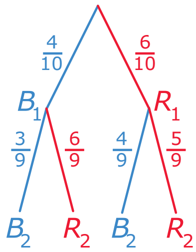
Uit een vaas met zes rode en vier blauwe knikkers worden zonder terugleggen twee knikkers getrokken.

Hoe groot is de kans dat de tweede knikker rood is?

Antwoord

Het maakt bij de tweede trekking verschil of de eerst getrokken knikker rood of blauw was. Door niet terug te leggen is immers de oorspronkelijke situatie gewijzigd. De tweede trekking is daarom afhankelijk van de eerste.

De gevraagde kans is $\text{P}(R_2) = \text{P}(R_1 \text{ en } R_2) + \text{P}(B_1 \text{ en } R_2) =$
$= \text{P}(R_1) \cdot \text{P}(R_2|R_1) + \text{P}(B_1) \cdot \text{P}(R_2|B_1) =$
$= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{54}{90} = \frac{3}{5}$



Figuur 4

Opgave 5

In **Voorbeeld 3** gaat het om de tweede knikker.

Hoe groot is de kans dat de tweede knikker blauw is?

Voorbeeld 4

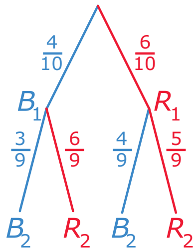
Uit een vaas met zes rode en vier blauwe knikkers worden zonder terugleggen twee knikkers getrokken. Je krijgt alleen de tweede knikker te zien, die is blauw.
Hoe groot is de kans dat de eerste knikker rood is?

Antwoord

Het maakt bij de tweede trekking verschil of de eerst getrokken knikker rood of blauw was. Door niet terug te leggen is immers de oorspronkelijke situatie gewijzigd. De tweede trekking is daarom afhankelijk van de eerste.

De gevraagde kans is $\text{P}(R_1|B_2)$.

Omdat $\text{P}(B_2) = \text{P}(R_1 \text{ en } B_2) + \text{P}(B_1 \text{ en } B_2) =$
$= \text{P}(R_1) \cdot \text{P}(B_2|R_1) + \text{P}(B_1) \cdot \text{P}(B_2|B_1) =$
$= \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{36}{90}$ is gemiddeld in 36 van de 90 trekkingen de tweede knikker blauw. In $4 \cdot 6 = 24$ van die trekkingen was de eerste knikker rood. De gevraagde kans is daarom $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.



Figuur 5

Merk op dat je deze kans kunt berekenen vanuit $\text{P}(B_2)$ en $\text{P}(R_1 \text{ en } B_2)$:

$\text{P}(R_1|B_2) = \frac{\text{P}(R_1 \text{ en } B_2)}{\text{P}(B_2)}$

Ga na dat dit past bij de algemene productregel voor afhankelijke gebeurtenissen.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 4**. Uit een vaas met zes rode en vier blauwe knikkers worden zonder terugleggen twee knikkers getrokken. Je krijgt alleen de tweede knikker te zien, die is blauw.

a Hoe groot is de kans dat de eerste knikker blauw is?

b Stel je nu voor dat de tweede knikker rood is. Hoe groot is dan de kans dat de eerste knikker blauw is?

Opgave 7

Je hebt een vaas met zeven rode, vijf witte en acht blauwe knikkers. Je trekt hieruit zonder terugleggen drie knikkers.

a Bereken de kans op drie rode knikkers.

b Bereken $\text{P}(B_3|R_1 \text{ en } R_2)$.

c Bereken $\text{P}(B_3 \text{ en } R_1 \text{ en } R_2)$.

d Bereken de kans op twee rode knikkers.

e Bereken de kans op drie knikkers van verschillende kleur.

Opgave 8

Voorwaardelijke kansen komen geregeld voor als je kansen berekent bij frequenties in kruistabellen. In een kruistabel staan de gecombineerde frequenties van twee variabelen: een kruistabel gebruik je in de bivariate statistiek. Een voorbeeld is een onderzoek naar de Mantoux-test middels een steekproef onder een grote groep personen. De Mantoux-test is een huidtest die wordt gebruikt om na te gaan of iemand tuberculose heeft. Vrijwel alle personen die aan tuberculose lijden, laten een reactie op deze huidtest zien. Maar ook een zeer klein deel van de personen die niet aan tuberculose lijdt, vertoont die reactie.

De tabel laat dat zien.

Mantoux-test	tuberculose	geen tuberculose	
reactie	98	99	197
geen reactie	2	9801	9803
	100	9900	10000

Tabel 1

a Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat iemand die een reactie vertoont op de Mantoux-test ook inderdaad aan tuberculose lijdt.

b Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat iemand die geen reactie vertoont toch aan tuberculose lijdt.

Verwerken

Opgave 9

Bij een wandeltocht over vochtig terrein zijn je sokken nat geworden. Onder in je rugzak heb je, los door elkaar, acht droge sokken van vier verschillende paren. Je trekt er één sok uit, en dan steeds weer een tot je de bijpassende sok hebt gekregen. Het is verstandig als je niet teruglegt.

a Hoe groot is de kans dat je precies bij de vierde sok die je pakt de sok pakt die bij de eerste past?

b Hoe groot is de kans dat de tweede of de derde sok bij de allereerste past?

Opgave 10

In West-Europa heeft 40% van de bevolking bloedgroep A, 10% bloedgroep B, 5% bloedgroep AB en 45% bloedgroep O. Voor de Rhesus-factor geldt: 85% is Rh-positief en 15% is Rh-negatief, ongeacht de bloedgroep waartoe men behoort.

a Bereken het percentage West-Europeanen dat bloedgroep A heeft en Rh-positief is.

b Bereken het percentage West-Europeanen dat bloedgroep O heeft en Rh-negatief is.

c Bereken het percentage West-Europeanen dat Rh-negatief is en niet bloedgroep O heeft.

d Welke van de acht combinaties van bloedgroep en Rh-factor is het zeldzaamst?

Opgave 11

Voor een onderzoek voor school heeft een groep leerlingen aan 116 voorbijgangers van boven de 18 jaar gevraagd of ze een tatoeage of piercing hebben.

In deze tabel zie je het resultaat. (Bij een piercing worden gaatjes in een oorlel niet meegerekend.)

	tatoeage	piercing	beide	geen van beide	totaal
vrouw	9	12	0	34	55
man	15	6	0	40	61
totaal	24	18	0	74	116

Tabel 2

a Hoeveel procent van de ondervraagden is vrouw?

b Hoeveel procent van de ondervraagden is vrouw en heeft een tatoeage?

c Voor de rest van de vragen geldt:

- deze steekproef blijkt representatief voor de gehele bevolking;
- V is een willekeurige ondervraagde voorbijganger.

Bepaal de kans dat V een piercing heeft.

d Bepaal de kans dat V een man is en een piercing heeft.

Ofwel: bepaal de kans $\text{P}(V$ is een man en V heeft een piercing$)$

e Bepaal de kans dat V een piercing heeft, onder voorwaarde dat V een man is.

Ofwel: bepaal de voorwaardelijke kans $\text{P}(V$ heeft een piercing $|V$ is een man$)$.

Opgave 12

De kans op ten minste één 6 bij vier keer gooien met een dobbelsteen is groter dan 50%.

a Laat zien dat dit inderdaad zo is.

Chevalier de Méré dacht daarom (in 1654) dat hij ook meer dan 50% kans had op dubbel zes als hij $6 \cdot 4 = 24$ keer met twee dobbelstenen gooide, maar hij kwam bedrogen uit. Zijn vriend Pascal moest hem uit de droom helpen.

b Bereken die kans op dubbel zes in procenten, in twee decimalen nauwkeurig.

c Hoe vaak moet je minstens met twee dobbelstenen gooien, opdat de kans op dubbel 6 groter is dan 50%?

Opgave 13

In een doos zitten tien kaarten, elk met een cijfer erop. Er is één kaart met een 1, er zijn twee kaarten met een 2, drie kaarten met een 3 en op vier kaarten staat een 4. Je trekt zonder terugleggen vier kaarten en legt die van links naar rechts naast elkaar. Je ziet dan een getal van vier cijfers.

a Hoe groot is de kans dat dit getal 1234 is?

b Hoe groot is de kans dat dit getal 4321 is?

c Hoe groot is de kans dat dit getal 3344 is?

d Bij a en b heb je dezelfde antwoorden gekregen. Licht toe waarom elk van de getallen die je met de cijfers 1, 2, 3 en 4 schrijft dezelfde kans heeft.

e Laat E het getal zijn dat door de eerste twee cijfers wordt voorgesteld, T het getal dat door de laatste twee cijfers wordt voorgesteld.

Bereken $\text{P}(T = 34 | E = 12)$ en $\text{P}(T = 12 | E = 34)$.

f Eén kaart is stiekem door iemand gemerkt. Hoe groot is de kans dat die kaart op uiterst links terechtkomt?

g Hoe groot is de kans dat de gemerkte kaart als derde in het rijtje komt te liggen?

h Test de productregel door na te gaan of je daarmee hetzelfde resultaat krijgt. Bereken dus de kans dat de eerste, tweede en vierde kaart ongemerkt zijn, en de derde gemerkt.

i Hoe groot is de kans dat het getal begint met een 3? Eindigt met een 3? Begint en eindigt met een 3?

Opgave 14

Bij een bepaalde ziekte kunnen twee verschillende medicijnen worden voorgeschreven: medicijn A of medicijn B. In principe wordt altijd (het beste) medicijn A voorgeschreven, maar 10% van de patiënten reageert daar allergisch op en krijgt dan medicijn B. Medicijn A zorgt in 95% van de gevallen voor genezing, medicijn B in 75% van de gevallen.
Iemand krijgt deze ziekte en geneest na medicatie. Hoe groot is de kans dat hij medicijn B heeft gekregen? Geef je antwoord in drie decimalen nauwkeurig.

Toepassen

Opgave 15: Drie deuren probleem

De winnaar van een quiz mag uit drie deuren er één kiezen. De deuren zien er hetzelfde uit, maar achter één ervan zit de hoofdprijs, achter de andere twee niets. Na de keuze wijst de spelleider een andere deur aan en zegt (naar waarheid) dat daar niets achter zit. De winnaar mag nu nog zijn keuze veranderen. Hoe zit het met de kansen om te winnen?

Dit probleem staat bekend als het **drie deuren probleem**

a Bereken de winkans in het geval dat hij niet wisselt.

b Bereken de winkans in het geval dat hij wisselt.

Opgave 16: Nationale Wetenschapsquiz

Bekijk een vraag uit één van de Nationale Wetenschapsquizzen.

> Met een steekproef testen we de deelnemers aan de tiende Nationale Wetenschapsquiz op een verboden pepmiddel. Stel dat tien procent van de deelnemers het pepmiddel gebruikt. De test is slechts voor negentig procent zuiver.

Een deelnemer blijkt pep-positief.
Hoe groot is de kans dat hij het pepmiddel daadwerkelijk heeft gebruikt?

Voor alle duidelijkheid: met de zinsnede ‘de test is slechts voor negentig procent zuiver’ wordt bedoeld dat de test in 10% van de gevallen een verkeerde uitslag geeft. Dus 10% van de gebruikers wordt pep-negatief getest en 10% van de niet-gebruikers wordt pep-positief getest.

Testen

Opgave 17

Je hebt een vaas met 1200 balletjes, 500 rode, 400 witte en 300 blauwe. Bij elke kleur zijn 200 van de balletjes van hout, de andere zijn van plastic. Het verschil is niet te voelen. B is een aselect uit de vaas gepakt balletje.

a Bepaal P (B is wit en B is van plastic).

b Bepaal P (B is rood | B is van hout) en P (B is van hout | B is rood).

c Bepaal P (B is rood of B is van hout).

Opgave 18

Op een school is onderzocht hoeveel leerlingen er roken. In de tabel vind je de resultaten van dat onderzoek.

rookgedrag	mannen	vrouwen	
roken	105	134	239
niet roken	475	486	961
	580	620	1200

Tabel 3

a Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat een willekeurige leerling van deze school rookt.

b Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat een willekeurig meisje van deze school rookt.

c Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat een willekeurige rokende leerling van deze school een meisje is.

Opgave 19

60% van de artikelen die een fabriek maakt is van soort A, 40% is van soort B. Er gaat wel eens iets mis. Van de artikelen van soort A moet 1% worden afgekeurd. Voor soort B is dat zelfs 2%.

a Wat is de kans dat een aselect gekozen artikel van soort A is en wordt afgekeurd?

b Wat is de kans dat een aselect gekozen artikel van soort B is en wordt goedgekeurd?

c Wat is de kans dat een aselect gekozen artikel wordt afgekeurd?

d Je kunt de productregel gebruiken om de kans te berekenen dat een afgekeurd artikel van soort B is. Doe dit.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.