2.2 Kansen optellen/aftrekken

Inleiding

Je hebt nu het vaasmodel en de bijbehorende kansboom leren kennen. Het lijkt een handig instrument om alle kansproblemen op te lossen, maar toch is het in de praktijk niet altijd even bruikbaar. Zodra het om grotere aantallen trekkingen gaat, wordt een kansboom onoverzichtelijk. Bij trekkingen uit een kaartspel bijvoorbeeld is dit al snel het geval. Dan is het handiger om terug te vallen op regels die beschrijven wanneer je kansen moet optellen en wanneer je ze juist moet vermenigvuldigen. Daarom wordt nu de kansrekening iets exacter opgebouwd: de kansrekening is een stelsel van regels voor het rekenen met kansen.

Je leert in dit onderwerp

- kansen berekenen met behulp van regels zoals de somregel en de complementregel;
- de basisbegrippen en de basisregels van de kansrekening gebruiken.

Voorkennis

- kansen bepalen met behulp van een kansboom;
- het vaasmodel met of zonder teruglegging voor het berekenen van kansen;
- telproblemen oplossen zoals bijvoorbeeld met een Venndiagram of een rooster;
- rekenen met relatieve frequenties.

Verkennen

Opgave V1

Een volledig kaartspel kent 52 kaarten, van elke ‘kleur’ evenveel.
Je trekt aselect uit zo'n kaartspel één kaart.

a Bereken de kans op hartenaas.

b Bereken de kans op hartentwaalf.

c Bereken de kans op een hartenkaart.

d Bereken de kans op geen aas.

e Bereken de kans op een hartenkaart of een ruitenkaart.

f Bereken de kans op een hartenkaart of een boer.

g Bereken de kans op een hartenkaart of een plaatje.

Figuur 1

Uitleg

Een volledig kaartspel kent 52 kaarten, van elke ‘kleur’ evenveel.
Je trekt aselect uit zo'n kaartspel één kaart.

De kansboom wordt bij grote hoeveelheden al snel heel onoverzichtelijk, maar ook bij meerdere trekkingen. Dan is het handiger om terug te vallen op regels die beschrijven wanneer je kansen moet optellen en wanneer je ze juist moet vermenigvuldigen.

- De kans op een hartenkaart is:

  $P\,(\text{hartenkaart}) = \frac{13}{52}$ want van alle vier de kleuren zijn er dertien kaarten.

- De kans op hartentwaalf is dan:
  $P\,(\text{hartentwaalf}) = 0$ want zo'n kaart bestaat niet.
- De kans op geen hartenkaart is:

  $P\,(\text{geen hartenkaart}) = \frac{52-13}{52} = 1 - \frac{13}{52} = \frac{39}{52}$.

- De kans op een hartenkaart of een ruitenkaart is:

  $\text{P}\,(\text{harten of ruiten}) = \frac{13+13}{52} = \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{26}{52}$.
- De kans op een boer, een aas of een hartenvrouw is:

  $\text{P}\,(\text{boer of aas of hartenvrouw}) = \frac{4+4+1}{52} = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} + \frac{1}{52} = \frac{9}{52}$.

Het lijkt erop dat je bij 'of' eenvoudigweg de kansen kunt optellen. Maar dat is hier alleen maar zo, omdat de mogelijkheden elkaar wederzijds uitsluiten. Vraag je namelijk naar een hartenkaart of een boer dan zijn er niet $13+4$ gunstige mogelijkheden, maar slechts $13+4-1$ vanwege de hartenboer die anders twee keer wordt geteld. 'Hartenkaart' en 'boer' sluiten elkaar niet wederzijds uit.

- De kans op hartenkaart of boer is:

  $\text{P}\,(\text{hartenkaart of boer}) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52}$.

Opgave 1

Uit een compleet spel speelkaarten wordt aselect een kaart getrokken.

a Hoe groot is de kans dat het een plaatje is?

b Hoe groot is de kans dat het geen plaatje is?

c Hoe groot is de kans dat het een hartenkaart is?

d Hoe groot is de kans dat het een hartenplaatje is?

e Hoe groot is de kans dat het een hartenkaart is of een heer?

f Waarom kun je bij e niet gewoon de kans op een hartenkaart en de kans op een heer optellen?

g Wordt de kans op harten of heer kleiner als ruitenheer en hartenaas in het spel ontbreken?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij een **kansexperiment** 'trekken van een kaart uit een kaartspel' bestaat een **uitkomstenverzameling** met 52 mogelijkheden. Een **gebeurtenis** zoals 'het trekken van een tien' is dan een deel van die uitkomstenverzameling.

Als G een gebeurtenis is, dan betekent $\text{P}\,(G)$ de kans op die gebeurtenis en $0 \leq \text{P}\,(G) \leq 1$.

Elke gebeurtenis heeft een **kans**. Hierbij gelden de volgende kansregels:

- De kans op een **onmogelijke gebeurtenis** (niets uit de uitkomstenverzameling) is 0.
- De kans op een **zekere gebeurtenis** (de complete uitkomstenverzameling) is 1.
- De **complementregel**:
  Is niet-G de ontkenning van gebeurtenis G dan is $\text{P}\,(\text{niet-}G) = 1 - \text{P}\,(G)$.
  Je noemt niet-G en G wel complementaire gebeurtenissen.
- De **somregel**:
  - Als de gebeurtenissen G_1 en G_2 elkaar **wederzijds uitsluiten**, dan is $\text{P}\,(G_1 \text{ of } G_2) = \text{P}\,(G_1) + \text{P}\,(G_2)$.
  - Als de gebeurtenissen G_1 en G_2 elkaar niet wederzijds uitsluiten, dan is $\text{P}\,(G_1 \text{ of } G_2) = \text{P}\,(G_1) + \text{P}\,(G_2) - \text{P}\,(G_1 \text{ en } G_2)$.

Voor twee gebeurtenissen G_1 en G_2 die elkaar wederzijds uitsluiten, geldt:
$\text{P}\,(G_1 \text{ en } G_2) = 0$

Figuur 2

Voorbeeld 1

Een volledig kaartspel kent 52 kaarten, van elke ‘kleur’ evenveel.
Je trekt aselect uit zo'n kaartspel één kaart.
Bereken de kans op een hartenkaart of een plaatje.

Antwoord

Er zijn 13 hartenkaarten en $4 \cdot 4 = 16$ plaatjes.
Maar deze gebeurtenissen sluiten elkaar niet uit: er zijn 4 hartenplaatjes.

De gevraagde kans is dus: $P(\text{hartenkaart of plaatje}) = \frac{13}{52} + \frac{16}{52} - \frac{4}{52} = \frac{25}{52}$.

Opgave 2

Bekijk het kaartspel in **Voorbeeld 1**. Je trekt er aselect één kaart uit.
Welke van de volgende gebeurtenissen sluiten elkaar uit?

A. hartenkaart en schoppenkaart
B. hartenkaart en vrouw
C. kaart met even getal en plaatje
D. kaart met even getal en ruitenkaart

Opgave 3

Bereken de kansen op de volgende gebeurtenissen.

a hartenkaart of schoppenkaart

b hartenkaart of vrouw

c kaart met even getal of plaatje

d kaart met even getal of ruitenkaart

Opgave 4

In een jaarlijks voetbaltoernooi worden per seizoen 306 wedstrijden gespeeld. In de tabel zie je van één seizoen het aantal wedstrijden per totaal aantal doelpunten.

aantal doelpunten	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
aantal wedstrijden	18	46	63	58	52	35	19	10	3	2

Tabel 1

Je kunt de relatieve frequentie van wedstrijden waarin zes keer of meer werd gescoord, opvatten als een (experimentele) kans.
Bereken deze kans.

Voorbeeld 2

Je trekt een lot uit een serie met de nummers 10, 11, 12, ..., 99.
Heb je een 2 of een 3 in het lotnummer, dan heb je een prijs.
Hoe groot is de kans hierop?

Antwoord

Eerst het cijfer 2:

- de kans op rechts een 2 is $\frac{9}{90}$;
- de kans op links een 2 is $\frac{10}{90}$;
- de kans op 22 is $\frac{1}{90}$.

Dus de kans op een 2 is: $\frac{9}{90} + \frac{10}{90} - \frac{1}{90} = \frac{18}{90}$.

De kans op een 3 in het lotnummer is op dezelfde manier: $\frac{18}{90}$.

De kans op een 2 of een 3 in het lotnummer is (denk aan 23 en 32): $\frac{18}{90} + \frac{18}{90} - \frac{2}{90} = \frac{34}{90}$.

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** gaat het om de trekking bij een loterij.

a Hoe groot is de kans dat het getrokken briefje het cijfer 0 bevat?

b Hoe groot is de kans dat het getrokken briefje het cijfer 0 en het cijfer 2 bevat?

c Hoe groot is de kans dat het getrokken briefje het cijfer 0 of het cijfer 2 bevat?

d Bereken de kans dat het getrokken briefje geen 0 en ook geen 2 bevat.
Maak gebruik van de complementregel.

Opgave 6

Je gooit met twee gewone dobbelstenen, één rode en één blauwe. R is het aantal ogen op de rode dobbelsteen, B dat op de blauwe.

a Maak een overzicht van alle mogelijkheden.

b Hoe groot is $\text{P}(R = 5)$?

c Hoe groot is $\text{P}(B = 4)$?

d Hoe groot is $\text{P}(R = 5 \text{ en } B = 4)$?

e Sluiten de gebeurtenissen $R = 5$ en $B = 4$ elkaar wederzijds uit?

f Hoe groot is $\text{P}(R = 5 \text{ of } B = 4)$?

Voorbeeld 3

Je probeert met een dobbelsteen een 6 te gooien. Als je maximaal vier keer mag proberen, hoe groot is dan de kans dat dit lukt?

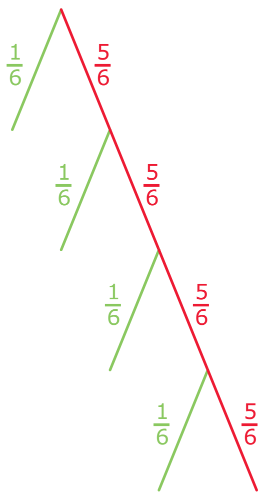
Antwoord

Maak hierbij een kansboom: groen stelt het werpen van een 6 voor en rood stelt geen 6 voor. Zo liggen de kansen:

- meteen een 6 gooien: kans $\frac{1}{6}$;
- pas de tweede worp een 6 gooien: kans $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$;
- pas de derde worp een 6 gooien: kans $\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$;
- pas de vierde worp een 6 gooien: kans $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}$.

Omdat deze vier gevallen elkaar uitsluiten, mag je de kansen optellen. Dit kan echter eenvoudiger door vast te stellen dat de complementaire gebeurtenis is: vier keer achter elkaar geen 6 gooien. Daarbij hoort een kans van $\left(\frac{5}{6}\right)^4$.

De gevraagde kans is daarom $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}52$.



Figuur 3

Opgave 7

In het **Voorbeeld 3** gaat het om het werpen met een dobbelsteen tot je een 6 gooit. Je mag tien keer proberen.

a Hoe groot is de kans dat je bij de derde worp voor het eerst een 6 gooit?

b Hoe groot is de kans dat je bij de achtste worp voor het eerst een 6 gooit?

c Hoe groot is de kans dat je een 6 gooit?

d Waarom is de complementregel nu erg handig?

Verwerken

Opgave 8

Bij een bloemenkraampje zijn alleen nog rozen en tulpen te koop: 20 tulpen en 25 rozen.

Er zijn 10 witte, 5 gele en 5 paarse tulpen en er zijn 12 witte rozen en 13 gele rozen.

De verkoper heeft alle bloemen in één emmer verzameld, hij pakt zonder te kijken een bloem.

Welk(e) van de volgende gebeurtenissen sluiten elkaar uit?

A. tulp en roos
B. tulp en geel
C. geel en roos
D. paars en roos

Opgave 9

Bij een bloemenkraampje zijn alleen nog rozen en tulpen te koop: 20 tulpen en 25 rozen. Er zijn 10 witte, 5 gele en 5 paarse tulpen en er zijn 12 witte rozen en 13 gele rozen. De verkoper heeft alle bloemen in één emmer verzameld. De verkoper pakt zonder te kijken een bloem.

a Hoe groot is de kans dat hij een roos pakt?

b Hoe groot is de kans dat hij een paarse bloem pakt?

c Hoe groot is de kans dat hij géén paarse bloem pakt?

d Hoe groot is de kans dat hij een gele bloem pakt?

e Hoe groot is de kans dat hij een gele bloem of een tulp pakt?

Opgave 10

Voor de ontwikkeling van kinderen zijn doosjes in de handel gebracht met plastic rondjes, vierkantjes, rechthoekjes en driehoekjes. Van elke soort zijn er grote en kleine stukjes. Van elke soort en elke grootte zijn er twee rode stukjes, twee gele en twee blauwe. Totaal dus 48 stuks.
Bereken voor een aselect gekozen stukje de kans.

a Het stukje is geel of een vierkantje.

b Het stukje is rood of geen vierkantje.

c Het stukje is klein of geen vierkantje.

d Het stukje is blauw of geel of een driehoekje.

Opgave 11

Bij een spel moet je eerst kop of munt gooien. Gooi je kop, dan moet je met één dobbelsteen gooien. Gooi je munt, dan mag je met twee dobbelstenen gooien. Bereken de volgende kansen.

a De kans dat je 12 ogen gooit.

b De kans dat je 7 ogen gooit.

c De kans dat je 7 of 12 ogen gooit.

d De kans dat je meer of minder dan 7 ogen gooit.

e De kans dat je 6 ogen gooit.

Opgave 12

Van de leerlingen van een school is 52% meisje, 48% jongen. Eén van elke dertien meisjes draagt een hoofddoek, één van elke zestien jongens draagt een basketbalpet.

a Hoeveel procent van de leerlingen draagt een hoofddoek? Hoeveel procent een basketbalpet?

b Hoe groot is de kans dat een aselect aangewezen leerling een jongen zonder pet is?

c Hoe groot is de kans dat een aselect aangewezen leerling een meisje is of iets op het hoofd draagt?

d Hoe groot is de kans dat een aselect aangewezen leerling een jongen is of niets op het hoofd draagt?

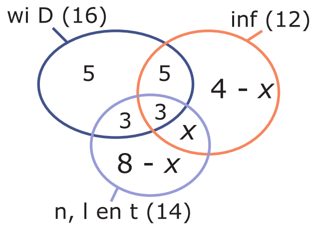
e Beschrijf de complementaire gebeurtenis van die bij d.

Toepassen

Op een school kiezen 26 leerlingen in 4 vwo het NT-profiel. In de vrije ruimte kunnen ze één, twee of drie vakken kiezen uit: wiskunde D, informatica en NLT (natuur, leven en technologie).
Zestien leerlingen kiezen wiskunde D, twaalf kiezen informatica en veertien kiezen NLT.
Er zijn dertien leerlingen die maar één van deze drie vakken kiezen.
Zes leerlingen kiezen wiskunde D en NLT, acht leerlingen kiezen wiskunde D en informatica, waarbij de drie leerlingen zitten die alle drie de vakken kiezen.
Hoeveel leerlingen kiezen alleen NLT en informatica?

Een diagram zoals dit kan helpen. Het heet een **venndiagram**. Het gevraagde aantal leerlingen dat alleen NLT en informatica kiest, stel je voor door x. Daarmee kun je het venndiagram invullen en x berekenen.

Ter controle kun je nog het hele diagram invullen.



Figuur 4

Opgave 13

Bekijk het venndiagram in **Toepassen**.

a Leg uit hoe je nu x kunt berekenen.

Je komt in 4 vwo een voor jou onbekende leerling uit de groep van 26 leerlingen in het NT-profiel tegen.

b Hoe groot is de kans dat deze leerling wiskunde D heeft gekozen?

c Hoe groot is de kans dat deze leerling alleen maar informatica heeft gekozen?

d Hoe groot is de kans dat deze leerling alle drie de vakken heeft gekozen?

e Hoe groot is de kans dat deze leerling wiskunde D en NLT heeft gekozen?

f Hoe groot is de kans dat deze leerling wiskunde D of NLT (of beide) heeft gekozen?

Opgave 14

De raad van commissarissen van een bouwonderneming heeft elf leden, onder wie vijf economen en vier juristen. Twee van de economen zijn ook jurist. De leden zijn om de beurt een maand voorzitter. De volgorde is door loten vastgesteld.

a Ga met behulp van een venndiagram na hoeveel leden econoom noch jurist zijn.

b Hoe groot is de kans dat de voorzitter deze maand econoom en jurist is?

c Hoe groot is de kans dat de voorzitter deze maand econoom of jurist is?

d Hoe groot is de kans dat zowel deze maand als de volgende maand de voorzitter econoom of jurist is?

Opgave 15

Een bestuur van 25 personen bestaat uit oprichters, oplichters en opzichters. Sommige leden hebben meer dan één van die kwaliteiten. Er zijn 10 oprichters, 11 oplichters en 15 opzichters. 1 persoon is zowel oprichter als oplichter en opzichter. 3 zijn oprichter en oplichter (en misschien ook opzichter) en 4 zijn oprichter en opzichter (en misschien oplichter).

a Maak op grond van deze gegevens een venndiagram.

b Hoe groot is de kans dat een willekeurig bestuurslid keurig is (geen oplichter)?

c Hoe groot is de kans dat een willekeurig bestuurslid oprichter is? Dat hij oplichter is? Dat hij beide is?

d Bepaal de kans dat een willekeurig bestuurslid oprichter of oplichter is.

e De kans dat een bestuurslid oprichter, oplichter of opzichter is, is natuurlijk 1. Iemand zegt: ‘Die kans moet de kans zijn dat hij oprichter of oplichter is, plus de kans dat hij opzichter is.’ Redeneren helpt niet, dus toon hem dat zijn resultaat niet goed kan zijn en vertel hem dan hoe het wel moet.

Testen

Opgave 16

Een spel kaarten bevat van elk van de vier ‘kleuren’ alleen de kaarten 7, 8, 9, 10, boer, vrouw, heer en aas. Totaal 32 kaarten. Beantwoord de vragen zowel door tellen van gunstige mogelijkheden als door gebruik van de somregel.

a Wat is de kans dat een uit zo'n spel getrokken kaart een ruiten of een plaatje is?

b Wat is de kans dat een uit zo'n spel getrokken kaart een harten of een 9 of een 10 is?

c Wat is de kans dat een uit zo'n spel getrokken kaart een 9 of een 10 is of geen harten?

Opgave 17

In een vaas zitten 9 balletjes, 3 rode, 3 blauwe en 3 gele. Ze zijn ook genummerd, van elke kleur draagt één balletje nummer 1, één balletje nummer 2 en één balletje nummer 3. Er wordt aselect een balletje getrokken. Bepaal de kans.

a Het balletje is niet rood.

b Het balletje is rood of heeft nummer 2.

c Het balletje is niet blauw of heeft niet nummer 3.