# 2.1 Kansbomen

## Inleiding

Bij basketbal wordt per speler het schotpercentage bijgehouden. Als iemand een schotpercentage van 25 heeft, scoort hij bij één op de vier doelpogingen. Je kunt dit percentage daarom opvatten als zijn trefkans bij elke doelpoging. Maar hoe liggen zijn kansen als hij meerdere doelpogingen doet?

Figuur 1

### Je leert in dit onderwerp

- kansen bepalen met behulp van een kansboom;
- het vaasmodel met of zonder teruglegging voor het berekenen van kansen.

### Voorkennis

- werken met boom- en/of stroomdiagrammen;
- kansen berekenen door tellen van mogelijkheden, eventueel met behulp van diagrammen.

## Verkennen

### Opgave V1

Bij basketbal wordt per speler het schotpercentage bijgehouden. Als iemand een schotpercentage van 25 heeft, scoort hij bij één op de vier doelpogingen. Je kunt dit percentage daarom opvatten als zijn trefkans bij elke doelpoging. Maar hoe liggen zijn kansen als hij meerdere doelpogingen doet?

**a** Hoe groot is de kans op twee scores als hij twee doelpogingen doet?

**b** Hoe groot is de kans op minstens één score als hij twee doelpogingen doet?

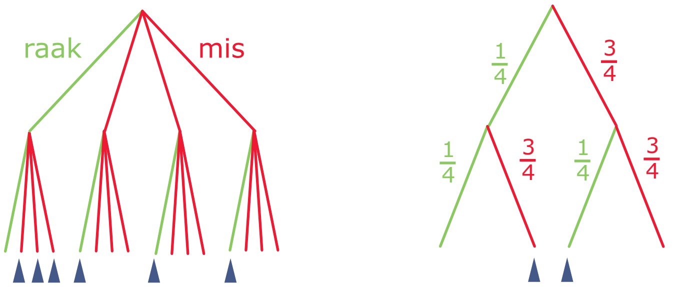
## Uitleg

Bij basketbal wordt per speler het schotpercentage bijgehouden. Als iemand een schotpercentage van 25 heeft, scoort hij bij één op de vier doelpogingen. Je kunt dit percentage daarom opvatten als zijn trefkans bij elke doelpoging.

Om zijn kansen te bepalen bij bijvoorbeeld twee doelpogingen maak je een boomdiagram: één treffer naast drie missers bij elke poging.

Door missers en treffers samen te voegen kun je het diagram vereenvoudigen tot een kansboom. Als je de kans wilt berekenen op precies één treffer bij twee doelpogingen, dan kun je in het boomdiagram de juiste routes tellen: het zijn er 6 van de 16. In de kansboom moet je dan kansen vermenigvuldigen en optellen:

$$\text{P}(X = 1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$




**Figuur 2**

Dezelfde kans kun je ook bepalen door de situatie op te vatten als het aselect twee keer trekken van een balletje uit een vaas met één groene (raak) en drie rode (mis) balletjes.

Je moet dan wel na de eerste keer een balletje te hebben getrokken dit balletje weer in de vaas terugdoen en het geheel schudden. Dit is een vaasmodel voor de doelpogingen van de basketballer, en het is een vaasmodel met teruglegging.

Bij elk vaasmodel kun je een kansboom maken om de bijbehorende kansen te berekenen. Als $X$ het aantal treffers bij twee doelpogingen is, dan geldt ook in het vaasmodel:

$$\text{P}(X = 1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{16} = 0{,}375$$

## Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Ga uit van een basketballer met een schotpercentage van 15.

**a** Teken een kansboom uitgaande van twee schoten op de basket.

**b** Bereken de kans op precies één treffer bij twee doelpogingen.

**c** Bereken de kans op twee treffers.

**d** Bereken de kans op hoogstens één treffer.

## Opgave 2

Een basketballer met een schotpercentage van 15 schiet drie keer op de basket.

**a** Bereken de kans op twee treffers.

**b** Bereken de kans op hoogstens twee treffers.

**c** Bereken de kans op minstens twee treffers.

## Opgave 3

In de **Uitleg** wordt gesproken over trekking met teruglegging.

**a** Er wordt bij de basketballer uit de uitleg aangenomen dat hij tijdens de schoten op de basket een vast schotpercentage van 25 heeft. Waarom gaat het dan om trekking met teruglegging? Licht je antwoord toe.

**b** Waarom kan hier slechts van een aanname sprake zijn? Hoe zit het in werkelijkheid met schotpercentages?

Ga weer uit van een vaas met vier balletjes waarvan er één groen en drie rood zijn. Je trekt nu aselect twee balletjes na elkaar, maar na het eerste balletje leg je dit niet terug.

**c** Hoe ziet de kansboom er in dit geval uit?

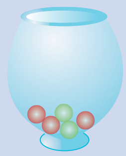
**d** Hoe hoe groot is nu de kans op één groen balletje?

**e** Hoe hoe groot is nu de kans op één rood balletje?

# Theorie en voorbeelden

## Om te onthouden

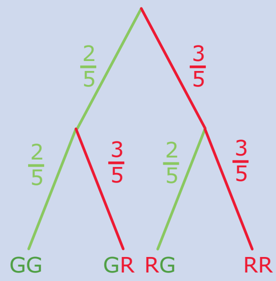
Veel situaties waarin kansen een rol spelen, kun je beschrijven door middel van aselecte trekking van balletjes uit een vaas. Dit noem je een **vaasmodel** voor de situatie.



Figuur 3

Bij elk vaasmodel kun je een **kansboom** maken om kansen te berekenen. Daarbij moet je goed onderscheiden:

**Trekking met teruglegging**
Na elke trekking van één balletje doe je dit terug in de vaas en je schudt het geheel. Dan pas trek je een volgend balletje. De kansboom bij een vaas met twee groene en drie rode balletjes zie je hiernaast.



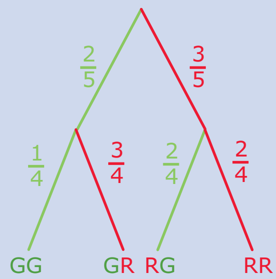

Figuur 4

P (2 groen) = P (GG) = $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$

P (eerst groen en daarna rood) = P (GR) = $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$

P (groen en rood) = P (GR of RG) = $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$

**Trekking zonder teruglegging**
Na elke trekking van één balletje doe je dit niet terug in de vaas. Je trekt meteen het volgende bolletje. (Twee in één greep kan ook.) De kansboom zie je hiernaast.




Figuur 5

P (2 groen) = P (GG) = $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$

P (eerst groen en daarna rood) = P (GR) = $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$

P (groen en rood) = P (GR of RG) = $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$

In een kansboom vermenigvuldig je de kansen bij een bepaalde route steeds vanaf het beginpunt van de boom. Omdat hier twee balletjes worden getrokken, heeft de kansboom twee 'lagen'. Het aantal lagen is gelijk aan het aantal getrokken balletjes.

## Voorbeeld 1

In een groep van vier mannen en vijf vrouwen worden door loten drie taken (wassen, afwassen en auto wassen) verdeeld.
Als één persoon meerdere van die drie taken mag doen, hoe groot is dan de kans dat er twee taken door een man en één door een vrouw worden uitgevoerd?

Antwoord

Bijpassend vaasmodel:

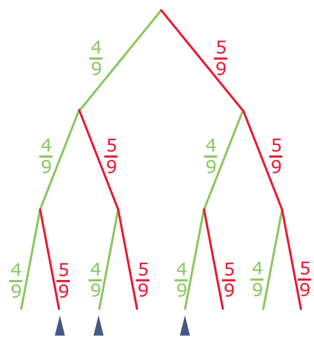
- vaas met negen balletjes, vier groen (mannen) en vijf rood (vrouwen);
- aselecte trekking van drie balletjes (aantal taken);
- met terugleggen (want elke persoon mag meerdere taken doen).

Daarbij hoort deze kansboom.

De routes waarbij twee taken door een man en één door een vrouw worden gedaan, zijn aangegeven.

De gevraagde kans is:

P (mmv of mvm of vmm) = $\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{80}{243} \approx 0{,}3$




Figuur 6

### Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**. Daarin worden kansen berekend bij het door loting verdelen van drie taken onder vier mannen en vijf vrouwen.

**a** Waarom gebruik je in dit voorbeeld het vaasmodel met terugleggen?

**b** Bereken de kans dat er twee taken door een vrouw en één door een man worden gedaan.

**c** Bereken de kans dat alle taken door een man worden gedaan.

**d** Bereken de kans dat hoogstens twee taken bij de vrouwen terechtkomen.

### Opgave 5

In een vaas zitten zes balletjes: twee rode en vier blauwe. Je trekt daaruit aselect en met terugleggen twee keer een balletje.

**a** Laat in een kansboom alle mogelijkheden zien.

**b** Hoe groot is de kans op eerst een blauw en dan een rood balletje?

**c** Hoe groot is de kans op twee balletjes van verschillende kleur?

## Voorbeeld 2

In een groep van vier mannen en vijf vrouwen worden door loten drie taken verdeeld.
Als elk van die drie taken door een andere persoon moet worden gedaan, hoe groot is dan de kans dat er twee taken door een man en één door een vrouw worden uitgevoerd?

Antwoord

Bijpassend vaasmodel:

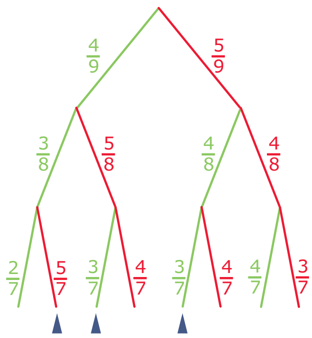
- vaas met negen balletjes, vier groen (mannen) en vijf rood (vrouwen);
- aselecte trekking van drie balletjes (aantal taken);
- zonder terugleggen (want elke persoon mag één taak doen en niet meer).

Daarbij hoort deze kansboom.

De routes waarbij twee taken door een man en één door een vrouw worden gedaan, zijn aangegeven.

De gevraagde kans is:

$$P(\text{mmv of mvm of vmm}) = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}+\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{5}{14}$$




Figuur 7

### Opgave 6

In **Voorbeeld 2** worden kansen berekend bij het door loting verdelen van drie taken onder vier mannen en vijf vrouwen.

**a** Waarom gebruik je in dit voorbeeld trekking zonder terugleggen?

**b** Bereken de kans dat er twee taken door een vrouw en één door een man worden gedaan.

**c** Bereken de kans dat alle taken door een man worden gedaan.

**d** Bereken de kans dat er hoogstens twee vrouwen één van de drie taken moeten doen.

### Opgave 7

In een vaas zitten zes balletjes: twee rode en vier blauwe. Je trekt twee balletjes tegelijk. Je kunt dit zien als het trekken van één balletje, en dan nog één zonder terugleggen.

**a** Maak een kansboom voor de kleuren.

**b** Wat is de kans op een rood en een blauw balletje?

**c** Wat is de kans op twee balletjes van dezelfde kleur?

### Opgave 8

In een vaas zitten zes balletjes: twee rode en vier witte.

**a** Ga na dat uit zes balletjes vijftien paren balletjes zijn te kiezen.

**b** Bij hoeveel van die paren zijn de balletjes van verschillende kleur? En van dezelfde kleur?

**c** Controleer dat je zo dezelfde kansen vindt als wanneer je ze als trekking 'zonder terugleggen' berekent.

### Voorbeeld 3

Twee basketballers hebben een verschillend schotpercentage: A heeft een schotpercentage van 25 en B heeft er een van 16%. Beiden doen een doelpoging.
Hoe groot is de kans op één treffer?

Antwoord

Voor een vaasmodel van deze situatie heb je twee vazen nodig, omdat het geen herhaling is van hetzelfde experiment:

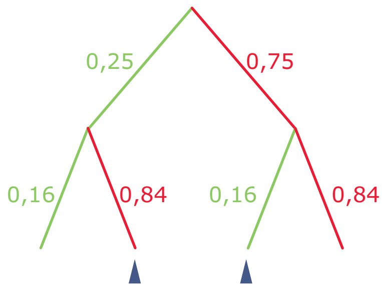
- voor A: een vaas met 100 balletjes, 25 groene (treffer) en 75 rode (misser);
- voor B: een vaas met 100 balletjes, 16 groene (treffer) en 84 rode (misser).

Verder geldt:

- aselecte trekking van één balletje uit elke vaas;
- je trekt maar één balletje uit elke vaas, dus terugleggen is niet aan de orde.

Daarbij hoort deze kansboom.

De routes waarbij precies één keer wordt gescoord, zijn aangegeven. Als $X$ het aantal treffers is, dan is de gevraagde kans:
$P(X = 1) = 0{,}25 \cdot 0{,}84 + 0{,}75 \cdot 0{,}16 = 0{,}33$



Figuur 8

### Opgave 9

In **Voorbeeld 3** gaat het om kansen bij twee basketballers met een verschillend schotpercentage. Ze schieten elk één keer op de basket.

**a** Hoe groot is de kans op twee treffers?

**b** Hoe groot is de kans op geen enkele treffer?

**c** Hoe groot is de kans op minstens één treffer?

## Verwerken

### Opgave 10

In een grabbelton zitten twee soorten (A en B) cadeautjes die dezelfde vorm hebben en even zwaar aanvoelen. Jari en z'n zus Marieke mogen ieder een cadeautje uit deze grabbelton pakken. Marieke pakt als eerste een cadeau en Jari daarna.

**a** Maak een kansboom bij deze situatie.

**b** Hoe groot is de kans dat Jari en Marieke beiden een cadeau van dezelfde soort hebben gepakt?

**c** Hoe groot is de kans dat Marieke een cadeau van soort A en Jari een cadeau van soort B heeft gepakt?

**d** Hoe groot is de kans dat precies één van de twee een cadeau van soort A heeft gepakt?

## Opgave 11

In een vaas zitten vijftien balletjes. Vier gele, vijf rode en zes blauwe. Er worden aselect drie balletjes na elkaar getrokken. Er wordt niet teruggelegd.

**a** Bereken de kans dat er drie rode balletjes worden getrokken.

**b** Bereken de kans dat er twee rode en één geel balletje worden getrokken.

**c** Bereken de kans dat alle balletjes een andere kleur hebben.

## Opgave 12

Er zijn twee taken te doen. Uit een groep van drie mannen en vijf vrouwen moeten twee personen worden geloot die de taken moeten uitvoeren. In een vaas worden acht balletjes gestopt, gemerkt m1, m2, m3 en v1, v2, v3, v4, v5. De loting bestaat uit het aselect trekken van twee balletjes uit die vaas, zonder terugleggen.

**a** Hoe groot is de kans dat de eerste taak door een man wordt verricht?

**b** Iemand zegt: ‘De kans dat de tweede taak door een man wordt verricht, is gelijk aan de kans dat de eerste taak door een man wordt verricht, want je kunt net zo goed eerst voor de tweede taak loten.’ Heeft hij gelijk?

**c** De taken zijn koken en afwassen. Wat is de kans dat beide taken door een vrouw moeten worden gedaan?

Neem nu aan dat er wel wordt teruggelegd. Iemand zou dan misschien beide taken moeten doen.

**d** Hoe groot is de kans dat beide taken door dezelfde persoon moeten worden verricht?

**e** Hoe groot is de kans dat beide taken door één man moeten worden verricht?

**f** Hoe groot is de kans dat beide taken nu door een vrouw moeten worden gedaan?

## Opgave 13

In een vaas zitten tien balletjes, zes van hout en vier van plastic. Van de houten balletjes zijn er vier rood en twee blauw. Van de plastic balletjes zijn er drie rood en is er één blauw. Op gevoel zijn hout en plastic niet te onderscheiden. Je trekt twee balletjes uit de vaas. Het gaat om de kleur én het materiaal van de getrokken balletjes. Neem eerst aan dat het eerst getrokken balletje wordt teruggelegd.

**a** Bereken de kans dat je eerst een rood houten, dan een blauw plastic balletje trekt.

**b** Bereken de kans dat je een rood houten en een blauw plastic balletje trekt.

Neem nu aan dat het eerst getrokken balletje niet wordt teruggelegd.

**c** Bereken de kans dat je eerst een rood houten, dan een blauw plastic balletje trekt.

**d** Bereken de kans dat je een rood houten en een blauw plastic balletje trekt.

Als het alleen om de kleur van de twee getrokken balletjes gaat, kun je toe met een kleinere kansboom.

**e** Teken die kansboom voor de gevallen met en zonder terugleggen.

**f** Bereken in elk van de twee gevallen de kans op twee verschillend gekleurde balletjes.

**g** Die kans is het grootst als je niet teruglegt. Licht dat toe.

### Opgave 14

Er wordt met drie dobbelstenen geworpen. Een kansboom kan nu erg groot worden. Misschien heb je er maar een stukje van nodig, of kun je een vaas in gedachten nemen?

**a** Wat is de kans dat je 17 of 18 ogen gooit?

**b** Wat is de kans dat je 16 ogen gooit?

**c** Wat is de kans dat je minstens twee zessen gooit?

**d** Voor de vraag naar het aantal zessen kun je een vaasmodel maken. Hoeveel kleuren gebruik je? Hoeveel balletjes van elke kleur heb je nodig?

### Opgave 15

Anne heeft in principe elke woensdagmiddag bijles van de heer Nijdam. Maar Anne is nogal ziekelijk: gemiddeld moet ze 30% van de bijlessen afzeggen. De heer Nijdam is een drukbezet man; hij is gemiddeld 20% van de woensdagen verhinderd.

**a** Bereken de kans dat de heer Nijdam van drie opeenvolgende woensdagen er twee verhinderd is.

**b** Bereken de kans dat de bijles op een willekeurige woensdag niet doorgaat.

Geef twee mogelijke berekeningen van de gevraagde kans.

## Toepassen

### Opgave 16: Bookmaker

Er worden twee wedstrijden Arsenal tegen Juventus gespeeld, één bij Arsenal thuis en één bij Juventus thuis.

Een bookmaker heeft vastgesteld dat bij de thuiswedstrijd Arsenal 50% kans heeft om te winnen en dat Juventus $\frac{1}{3}$ kans heeft om te winnen. Bij de returnwedstrijd ligt dit anders, namelijk een derde kans op winst voor Arsenal en een derde kans op winst voor Juventus.

**a** Hoe zou een bookmaker tot deze kansen komen?

**b** Maak een kansboom voor beide wedstrijden, afgaande op de voorspelling van de bezoekers.

**c** Hoe groot is de kans dat elk van beide teams één van de wedstrijden wint (als we mogen afgaan op de mening van de bezoekers)?

## Testen

### Opgave 17

Ongeveer 1 op de 12 Nederlandse mannen is kleurenblind. Aan hun uiterlijk kun je dit niet zien. Een politieagent houdt een auto aan die door een rood stoplicht reed. Er blijken vier mannen in te zitten. Hij vraagt zich af hoe groot de kans is dat twee inzittenden kleurenblind zijn.

**a** Maak een bijpassende kansboom.

**b** Beantwoord de vraag van de politieagent.

### Opgave 18

De Grutter verkoopt zakjes met 16 gomballen. De bedoeling is dat in elk zakje 8 rode en 8 gele gomballen zitten. De vulmachine is niet zo precies, zodat dat maar voor de helft van de zakjes klopt. In $\frac{1}{4}$ deel van de zakjes zitten 9 rode en 7 gele gomballen en in het resterende $\frac{1}{4}$ deel van de zakjes zitten 7 rode en 9 gele.

**a** Je kiest aselect zo'n zakje en daaruit aselect een gombal. Je denkt: rood en geel hebben dezelfde kans, dus de kans dat mijn gombal rood is, is 50%. Leg uit, dat dit inderdaad klopt.

**b** Je hebt zo'n zakje met 9 rode en 7 gele gomballen. Je eet achter elkaar 3 gomballen, willekeurig gepakt. Is de kans dat ze alle drie geel zijn groter dan 5%?

**c** Terwijl jij snoept, pikt iemand anders een rode gombal weg. De kans op 3 gele zal dan wel wat groter zijn. Ga na wanneer die het grootst is: als de rode gepikt wordt nadat jij de eerste op hebt of als dat na jouw tweede gombal gebeurt.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.